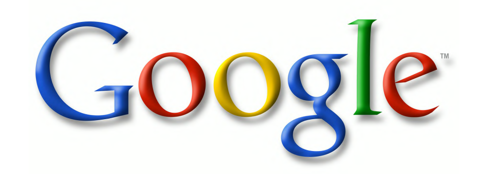
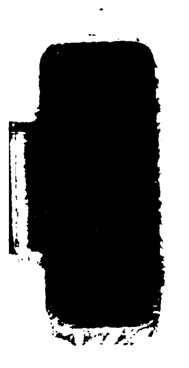





UNIV.
OF
MICH.




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



THEORIE DER WASSERRÄDER

VON

INGENIEUR DR. RICHARD VON MISES

SONDERABDRUCK AUS DEM 57. BANDE
DER ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT 24 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit nimmt die Probleme der *technischen Hydraulik*, die mit der Untersuchung der Bewegungsvorgänge in umlaufenden Kreiselrädern (Turbinen, Kreiselpumpen, Wasserrädern) zusammenhängen, vom Standpunkt der *rationellen Hydromechanik* aus in Angriff. Wer den tiefen und weiten Gegensatz kennt, der sich historisch zwischen den beiden ursprünglich verwandten Forschungsrichtungen herausgebildet hat, wird in dem Folgenden keine abschließenden Untersuchungen erwarten. Fast durchweg konnten nur *Ansätze* zu Lösungen geboten werden, vielfach wurden *mathematische Hypothesen*

der Betrachtung zugrunde gelegt, oft auch nur *Vermutungen* ausgesprochen.

Die ersten beiden Paragraphen enthalten eine kurze Ableitung der Eulerschen und Helmholtzschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten, ergänzt durch einige Ausführungen über Relativbewegung und die Formulierung eines naheliegenden, später viel verwendeten Folgesatzes zur Wirbeltheorie (Satz III, S. 13). Hier konnte, wenn auch in möglichster Knappheit, die Wiederholung von Bekanntem nicht ganz vermieden werden, wenn anders für das Folgende die ausreichende Grundlage gewonnen werden sollte; so ist die Verwendung des für die Stromlinien *natürlichen* Koordinatensystems in Verbindung mit der unmittelbar anschaulichen *vektoriellen* Auffassung für die spätere Entwicklung von graphischen Näherungsmethoden zur Integration nicht unwesentlich. Der dritte Paragraph wirft einen Blick auf den derzeitigen Stand und die Erweiterungsmöglichkeit der Theorie *zäher Flüssigkeiten* und bringt eine kurze Andeutung unserer im zweiten Abschnitt näher auszuführenden Hypothese, wonach es möglich ist, die Gleichungen für *ideale* Flüssigkeiten zur Erzielung einer angenäherten Darstellung *wirklich beobachtbarer* (turbulenter) Bewegungen heranzuziehen. Unsere Theorie tritt der von Boussinesq zur Seite und erhebt vor allem den Anspruch, mit den heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln der Mathematik leichter verwertbar zu sein als jene. § 4 knüpft an eine kurze Betrachtung der ebenen Bewegung die allgemeine Formulierung des *zweidimensionalen* Strömungsproblemes an und wendet sich dann einer eingehenden Erörterung der beiden speziellen, von H. Lorenz und Prášil im Zusammenhange mit Fragen der Turbinentheorie zur Sprache gebrachten Bewegungsformen zu. Hier ist mit besonderem Nachdruck der Unterschied zwischen der Lorenzschen „Bewegung in *symmetrischen Stromschichten*“ und der von Prášil behandelten *„symmetrischen Strömung“* hervorgehoben, und nach jeder Richtung hin eine Klärung der noch strittigen Fragen angestrebt worden.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit dem Randwertproblem der grundlegenden Differentialgleichungen, das den Mittelpunkt jeder sachgemäßen Darstellung der Hydromechanik bilden sollte. Tatsächlich kennt man hier außer dem Gaußschen, von Thomson erweiterten Theorem über Potentialströmungen im wesentlichen nur noch einen Satz über die Bestimmbarkeit der nichtstationären Wirbelbewegung durch die anfängliche Wirbelverteilung; der uns hauptsächlich interessierende Fall der allgemeinen stationären Strömung scheint überhaupt noch nicht behandelt zu sein. Wir weisen zunächst in § 5 auf

die Ergebnisse hin, die sich für die *ebene* Bewegung aus den Picardschen Untersuchungen über elliptische Differentialgleichungen gewinnen lassen und schlagen hierauf einen durchaus andern Weg ein, der uns durch infinitesimalgeometrische Überlegungen hindurch zu anschaulichen, wenn auch nicht strengen Schlüssen über die *allgemeinen* Randwertfragen führen soll. § 6 bringt den Ansatz zur Konvergenzuntersuchung eines Fortsetzungsverfahrens, das der Hauptsache nach eine geometrische Wendung der Cauchy-Kowalewskischen Betrachtungen über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen bedeutet. Mit den auf plausible Annahmen gestützten Behauptungen der folgenden beiden Paragraphen greifen wir weit über den Rahmen des bisher Bewiesenen hinaus, aber es gelingt uns damit, die Grundlagen für eine praktisch durchführbare *näherungsweise Integration* zu gewinnen. Unser wichtigstes Ergebnis, daß zur Bestimmung einer Bewegung idealer Flüssigkeit außer den eigentlichen Randbedingungen die Kenntnis der Bernoullischen *Konstanten* (die wir „Strömungsenergie" nennen) in allen Punkten eines „vollen" Querschnittes, sowie die gewisser „Verteilungsziffern" notwendig und hinreichend ist, führt uns schließlich zur Formulierung der bereits angekündigten Hypothese, mit der wir uns wieder der Betrachtung *wirklicher* Flüssigkeiten nähern. Wie Boussinesq, um Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zu erhalten, einen fingierten, im wesentlichen experimentell zu bestimmenden Reibungskoeffizienten als Funktion der Querschnittskoordinaten in die Stokes'schen Gleichungen einführt, versuchen wir unsererseits durch eine geeignete, in jedem Falle besonders zu treffende *Annahme über Strömungsenergie und Verteilungszahlen* den Beobachtungen gerecht zu werden.

Im dritten Abschnitt sind Untersuchungen zusammengefaßt, die gewissermaßen *Systemgrößen der Flüssigkeitsbewegung* betreffen, und deren gemeinsames Merkmal es ist, daß sie auf keinerlei besonderer Voraussetzung über die Natur der Flüssigkeit beruhen. Hier war zunächst Gelegenheit geboten, für die Verwendung der in der technischen Literatur eingebürgerten Begriffe von der *„Reaktion"* des Wassers (§ 9) und der *„hydraulischen Höhe"* (die wesentlich mit unserer Strömungsenergie zusammenfällt, § 10) eine breite Grundlage zu schaffen. Gleichzeitig konnten die experimentellen Ergebnisse über den *Druckverlauf* bei zähen Flüssigkeiten, der bei unserer oben angedeuteten Betrachtungsweise noch unbestimmt bleibt, zur Besprechung gelangen. § 11 bringt die *Bewegungsgleichung* für das Kreiselrad, die in der allgemeinsten, von jeder Einschränkung freien Form aufgestellt werden konnte; sie wird aber noch in demselben Paragraphen, den in der

1*

Praxis gegebenen Verhältnissen entsprechend, so weit spezialisiert, daß eine Prüfung durch *Versuchsresultate*, die an *Francis-Turbinen* und *Kreiselpumpen* gewonnen sind, ermöglicht wird. In ähnlicher Weise untersucht § 12 den im Rade vor sich gehenden *Energieaustausch* mit Rücksicht auf die durch Zähigkeit bedingten Verluste — bei deren Behandlung wir uns allerdings bewußt sind, weit weniger „theoretisch" vorgegangen zu sein, als es in den meisten Darstellungen technischer Richtung zu geschehen pflegt.

Der letzte Abschnitt enthält zunächst in § 13 eine kritische Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der *elementaren*, auf zum Teil unvollständigen Voraussetzungen beruhenden „Turbinentheorie". Hieran anknüpfend entwickeln wir in den letzten beiden Paragraphen unseren aus der Gesamtheit der vorangestellten Untersuchungen geschöpften Standpunkt zu den beiden wichtigsten Fragen: der *Ermittlung des Strömungsverlaufes* in einem gegebenen Rade (§ 14) und der vorteilhaften *Gestaltung der Radschaufeln* (§ 15). In § 14 wird ein praktisches Beispiel *(Strömung im Schaufelraum einer Francis-Turbine,* Bauart Camerer) zu unserem Integrationsverfahren graphisch durchgeführt, und es werden die sich aus der Kenntnis der Stromlinien ergebenden Folgerungen über die *Wahl der Austrittskante* usw. erörtert. Der letzte Paragraph endlich diskutiert die verschiedenerseits geltend gemachten Gesichtspunkte für die Konstruktion der Radschaufeln und bringt insbesondere eine erstmals von Grashof angedeutete Auffassung in den Vordergrund, deren konsequente Verfolgung auf das Prášilsche Problem der symmetrischen Bewegung zurückführt.

I. Abschnitt. Die Differentialgleichungen der Flüssigkeitsbewegung.

§ 1. Die Eulerschen Gleichungen.

1. Für die Bewegung kleiner fester Körper gilt die *Newtonsche Gleichung*

$$m w_x = k_x,$$

in der bedeuten: m die durch die Erdanziehung bestimmbare Masse des Körpers, k_x die Summe der in einer beliebigen Richtung x liegenden Komponenten aller an äußeren physikalischen Merkmalen erkennbaren, auf m wirkenden Kräfte, w_x die x-Komponente der Beschleunigung irgendeines Punktes des Körpers. In schärferer Weise ist die Gleichung auf eine bewegte, einen endlichen Raumteil voll ausfüllende Flüssigkeitsmenge anwendbar (Euler), wenn man voraussetzt: ihr Volumen zerfällt zu jeder Zeit in eine Anzahl von Teilen, innerhalb deren der

Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{c}$[1]) eine eindeutige, stetige und wenigstens einmal differenzierbare Funktion der Koordinaten ist; ferner ist an jeder Stelle $\mathbf{c}$ als Funktion der Zeit, wenigstens abteilungsweise eindeutig, stetig und differenzierbar. Dann läßt sich für jeden Punkt innerhalb des räumlichen und zeitlichen Stetigkeitsgebietes, wenn mit ds das Wegdifferential in der Richtung von $\mathbf{c}$ bezeichnet wird, schreiben:

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c\frac{\partial c_x}{\partial s} = \lim_{m=0}\left(\frac{k_x}{m}\right).$$

Die rechte Seite enthält die von der Schwere herrührende Konstante g_x, die x-Komponente des vertikal abwärts gerichteten Vektors $\mathbf{g}$, ferner einen Betrag, der der Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeitsteilchen zugeschrieben wird.

Auf Beobachtungen über die allgemeinen Gleichgewichts- und Bewegungsverhältnisse des Wassers stützt man die Annahme, welche die sogenannte *ideale Flüssigkeit* charakterisiert, daß ein irgendwie abgegrenzter Wasserkörper an jeder Stelle seiner Oberfläche einen *senkrecht* gegen diese gerichteten Druck k' erfährt. Diese Hypothese wird mit der der Newtonschen Gleichung analogen Aussage über die *Momente* von Kraft und Beschleunigung in Einklang gebracht durch die Festsetzung: Es existiert eine zu jeder Zeit (mit Ausnahme singulärer Zeitpunkte) im *ganzen* Flüssigkeitsgebiete eindeutige, stetige und differenzierbare, an jeder Stelle aber der Zeit nach wenigstens *abteilungsweise* eindeutige, stetige und differenzierbare Funktion, der „Flüssigkeitsdruck"

$$p = \lim_{f=0}\left(\frac{k'}{f}\right).$$

Hierin ist f ein beliebig gelegenes, einen beliebigen Punkt enthaltendes Flächenstück und der Grenzübergang gegen diesen Punkt hin ein willkürlicher. (Pascalsches Prinzip.)

Die Betrachtung eines nach der x-Richtung orientierten zylindrischen Volumelementes vom Querschnitt f und der Höhe Δx gibt für die x-Komponente der vom Drucke herrührenden Kraft für die Volumeinheit den Betrag:

$$\lim_{\substack{f=0\\ \Delta x=0}}\left[\frac{1}{f\Delta x}(pf-p'f)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

---

1) Eine vektorielle Größe soll hier stets durch einen fetten Buchstaben, eine zugehörige Komponente, bzw. die Länge des Vektors, durch denselben Buchstaben mit, bzw. ohne beigefügten Index bezeichnet werden.



Setzt man noch voraus, daß für jedes Flüssigkeitsteilchen der Grenzwert μ des Quotienten „Masse durch Volumen" existiert, so wird

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c\frac{\partial c_x}{\partial s} = g_x - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{1}$$

Die spezifische Masse μ oder das spezifische Gewicht $\gamma = g\mu$ kann für alle im Folgenden zu behandelnden Probleme der Wasserbewegung *mit genügender Annäherung als konstant* betrachtet werden. Bezeichnet h die vertikal über einem festen Niveau gemessene Höhe eines Punktes, so ist wegen

$$g_x = -g\frac{\partial h}{\partial x},$$

mit der Abkürzung

$$P = gh + \frac{p}{\mu}, \tag{2}$$

für jeden Punkt innerhalb des Stetigkeitsgebietes von p und c und jede *beliebige* Richtung (Eulersche Bewegungsgleichung):

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c\frac{\partial c_x}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \tag{A}$$

2. Zu dieser *dynamischen* Gleichung, welche, für jede Richtung gültig, zwei unabhängige analoge Gleichungen zur Folge hat, tritt als weitere der Ausdruck für die *kinematische* Bedingung, daß die Masse, also bei konstanten μ auch das Volumen, eines Wasserteilchens sich nicht ändert. Bildet man innerhalb des Stetigkeitsgebietes von c aus Linien, die in jedem Punkte die Richtung von c haben (Stromlinien), eine dünne Röhre (Stromfaden), und bezeichnet mit f den senkrecht zu einer der Stromlinien gemessenen Querschnitt der Röhre, so ist

$$\lim_{f=0}(cf) = \text{konst.},$$

wenn der Grenzübergang gegen eine Stromlinie hin erfolgt, auf der c nirgends verschwindet. Jedenfalls ist für jeden Punkt im Stetigkeitsgebiet von c (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial s}\lim_{f=0}(cf) = 0. \tag{B}$$

3. Die Giltigkeit der Gleichungen (A) und (B) wird im Einklang mit ihrer mechanischen Bedeutung *über die Grenzen eines Stetigkeitsgebietes* hinaus auf alle Punkte im Innern der Flüssigkeit ausgedehnt durch folgende Festsetzungen. Erleidet eine der Ableitungen $\frac{\partial c_x}{\partial s}$, $\frac{\partial c_x}{\partial t}$ oder der Wert von p als Funktion von t einen plötzlichen Sprung, so gehören in (A) immer zusammen: der vorwärts genommene Differential-

quotient nach t, der im Sinne von c genommene nach s und der Wert von p bzw. P *nach* dem Sprunge; ebenso umgekehrt; Gleichung (B) soll über die Grenze zweier zusammenstoßender, räumlicher Stetigkeitsgebiete erhalten bleiben, so daß eine Stromlinie im Innern einer Flüssigkeit nie enden, die *Größe* c als Funktion von s keinen Sprung erfahren kann. Ist c im ganzen betrachteten Raumteil von t unabhängig, so muß überall, wo c nicht verschwindet, $\frac{\partial c}{\partial s}$ eindeutig definiert sein: stationäre Stromlinien haben also nirgends einen Knick und können von keiner Unstetigkeitsfläche geschnitten werden.

An einer äußeren Flüssigkeitsgrenze sind im allgemeinen weder $\frac{\partial}{\partial t}$ noch $\frac{\partial}{\partial s}$ definiert; in unsere Gleichungen treten dann die Werte ein, die sich aus der Stetigkeit beim Fortschreiten vom Innern her ergeben.

Denkt man sich eine starre Wand, die zwei Flüssigkeitsgebiete trennt, unendlich dünn, so erhält sie den Charakter einer Unstetigkeitsfläche, die — ebenso wie die Unstetigkeitsfläche der stationären Bewegung — die Eigenschaft hat, dauernd aus *denselben* Flüssigkeitsteilchen zu bestehen.

4. Die Schreibweisen, in denen wir die Gleichungen (A) und (B) in dieser Arbeit gelegentlich verwenden werden, sind folgende: In *Vektorsymbolik* schreibt man für den Vektor, dessen Komponente in einer beliebigen Richtung x gleich $\frac{\partial P}{\partial x}$ ist, grad P, (Gradient von P, senkrecht zur Fläche $P =$ konst. und von der Größe $\frac{\partial P}{\partial n}$) also

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c\,\frac{\partial c}{\partial s} + \operatorname{grad} P = 0. \tag{A'}$$

In dem für die Stromlinien *natürlichen Koordinatensystem*, das aus den Richtungen ihrer Tangente im Sinne von c (ds), der Hauptnormalen nach der Krümmungsachse hin (dn) und der Binormalen (dm) besteht, wird

$$\text{(A'')}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + c\,\frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial s} &= 0. \\ \frac{\partial c_n}{\partial t} + \frac{c^2}{\varrho} + \frac{\partial P}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} &= 0; \end{aligned}$$

dabei bedeuten die Indices n und m die Komponenten bezogen auf die bei der Differentiation fest gedachten Richtungen dn und dm. Für *Cartesische Koordinaten* hat man

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x\,\frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y\,\frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z\,\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{A'''}$$

mit zwei daraus durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen. Setzt man anstelle der x, y, z die Größen r, $r\varphi$, z eines *Zylinderkoordinatensystems* und bezeichnet mit c_r, c_u die Komponenten in den *veränderlichen* Richtungen des Radius und der Kreistangente, so sind noch zwei Beschleunigungsgrößen hinzuzufügen, die konstanten Werten der c_r, c_u entsprechen, nämlich $-\frac{c_u^2}{r}$ in der ersten und $\frac{c_u c_r}{r}$ in der zweiten Gleichung, also

$$(A^{IV})\quad \begin{aligned} &\frac{\partial c_r}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_r}{r\partial\varphi} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{c_u^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial c_u}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_u}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_u}{r\partial\varphi} + c_z \frac{\partial c_u}{\partial z} + \frac{c_u c_r}{r} + \frac{\partial P}{r\partial\varphi} = 0 \\ &\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_z}{r\partial\varphi} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Der vektorielle Ausdruck für (B) ist

$$(B')\qquad \operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$$

(Divergenz von $\mathfrak{c}$). Legt man einen vierkantigen Stromfaden vom Querschnitt $dn\ dm$ der Betrachtung zugrunde, so wird

$$\frac{\partial}{\partial s}(c\, dn\, dm) = \frac{\partial c}{\partial s} dn\, dm + c \frac{\partial c_n}{\partial n} \frac{dn}{c} dm + c\, dn \frac{\partial c_m}{\partial m} \frac{dm}{c} = 0,$$

somit

$$(B'')\qquad \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial c_n}{\partial n} + \frac{\partial c_m}{\partial m} = 0.$$

Schneidet man einen entsprechend gebildeten Stromfaden durch zwei benachbarte zur z-Achse eines Cartesischen Koordinatensystems normale Ebenen, so ist

$$\frac{\partial}{\partial s}(c_z\, dx\, dy) = \frac{\partial c_z}{\partial s} dx\, dy + c_z \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_x}{c_z}\right) dx \frac{c_z}{c} dy + c_z\, dx \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_y}{c_z}\right) dy \frac{c_z}{c} = 0$$

und nach geringer Umformung:

$$(B''')\qquad \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0.$$

Schließlich wird, ähnlich wie oben, für Zylinderkoordinaten

$$(B^{IV})\qquad \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{\partial c_u}{r\partial\varphi} + \frac{c_u}{r} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0.$$

§ 2. Die Wirbelsätze; Relativbewegung.

1. Die nächstliegende Verarbeitung der Grundgleichungen besteht darin, die Variable p aus ihnen zu eliminieren. Die sich damit ergebenden Differentialbeziehungen für die Geschwindigkeitsverteilung

bilden den Inhalt der Helmholtzschen *Wirbelsätze.* Kennt man einmal den Wert von c an jeder Stelle und den Druck an *einem* Punkte zu jeder Zeit, so läßt sich die Druckverteilung mithilfe von (A) ohne weiteres bestimmen.

Wir geben von unseren Gleichungen (A″) in natürlichen Koordinaten aus, führen anstelle von P die neue Variable H durch die Gleichung

$$H = \frac{c^2}{2g} + \frac{P}{g} = \frac{c^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma} \tag{3}$$

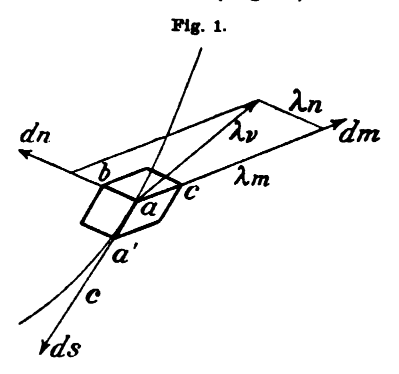
ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial s} = 0, \\ &\frac{\partial c_n}{\partial t} + c\left(\frac{c}{\varrho} - \frac{\partial c}{\partial n}\right) + g\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \\ &\frac{\partial c_m}{\partial t} - c\frac{\partial c}{\partial m} + g\frac{\partial H}{\partial m} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Größe H wollen wir als *„Strömungsenergie“* der Gewichtseinheit Wasser, oder kurz „Strömungsenergie“, bezeichnen und werden den Namen späterhin (§ 10) rechtfertigen.

2. Die Koeffizienten von c in den beiden letzten Gleichungen haben fundamentale kinematische Bedeutung. Die Seite aa' (Fig. 1) eines Volumenelements ds, dn, dm, rotiert um die nach dm fallende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{c}{\varrho}$, die Seite ab um dieselbe Achse im entgegengesetzten Sinne mit $\frac{\partial c}{\partial n}$. Es ist also $\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\varrho} - \frac{\partial c}{\partial n}\right)$ die Geschwindigkeit mit der die Winkelhalbierende von aa' und ab sich in dem Drehsinn von ds gegen dn um dm dreht; ebenso $\frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial m}$ die Geschwindigkeit, mit der die Winkelsymmetrale von ac und aa' um dn in der Richtung von dm gegen ds rotiert. Man betrachtet demgemäß diese Größen

Fig. 1.



$$\lambda_m = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\varrho} - \frac{\partial c}{\partial n}\right), \quad \lambda_n = \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial m},$$

als die nach dm bzw. dn fallenden *Komponenten eines Vektors* λ, dessen dritte Komponente λ_s analog definiert wird:

$$\lambda_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial n} - \frac{\partial c_n}{\partial m}\right)$$

ist die Drehgeschwindigkeit um ds der Symmetrale von ab und ac. Für die momentane Bewegung des Volumelementes hat λ die Bedeutung einer *„mittleren Winkelgeschwindigkeit“*, und man findet durch entsprechende Umformung für die einer *beliebigen* Richtung x entsprechende Komponente:

$$\lambda_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z}\right),$$

wenn x, y, z die Koordinaten eines mit ds, dn, dm gleichsinnigen, festen, orthogonalen Achsenkreuzes bedeuten. Man pflegt einen Vektor, der mit den Differentialquotienten eines zweiten so zusammenhängt, wie 2λ mit c als den *Rotor* des letzteren zu bezeichnen,

$$2\lambda = \text{rot}\, c,$$

und den halben Rotor der Geschwindigkeit insbesondere *„Wirbel“* zu nennen.

Aus der Form des Ausdruckes für λ_x erkennt man, daß Gl. (B) erfüllt ist, wenn statt der Komponenten von c die von λ gesetzt werden, d. h. es ist $\text{div}\, \lambda = 0$; oder: Bildet man aus „Wirbellinien“ d. s. Linien, die an jeder Stelle die Richtung von λ haben, eine „Wirbelröhre“, so ist längs derselben im limes das Produkt λf, die sog. *„Wirbelstärke“*, konstant. Eine geometrische Deutung gestattet die zu c parallele Komponente von rot c: Zieht man (Fig. 1) durch b bzw. c zu den hier hindurchgehenden Stromlinien die Binormale bzw. die Hauptnormale, so schneiden sich die beiden Geraden im allgemeinen nicht, sondern haben, gemäß der Definition von λ_s, einen von der ersten zur zweiten gemessenen Abstand $-2\lambda_s\, dm\, dn$ im Sinne von ds; nur wenn λ_s verschwindet *gibt es Flächen, welche alle Stromlinien senkrecht schneiden.*[1])

3. Wir schreiben nun unsere Gleichungen (4) in der Form

$$\frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial n} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial c_n}{\partial t} + 2c\lambda_m + g\frac{\partial H}{\partial n} = 0,$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} - 2c\lambda_n + g\frac{\partial H}{\partial m} = 0.$$

Der Vektor mit den Komponenten $0, -c\lambda_m, c\lambda_n$ steht senkrecht auf c und auf λ und hat die Größe $c\lambda_\nu$, wenn λ_ν die Resultierende aus λ_n und λ_m

1) Vergl. Jaumann, Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1906, S. 145. — Die Behandlung der Flüssigkeitsbewegung mit Hilfe natürlicher Koordinaten bei Grashof, Theoret. Maschinenlehre, Bd. I, Leipzig 1875, S. 398, beruht daher auf einer unrichtigen Voraussetzung; doch bleiben seine Ergebnisse im wesentlichen davon unberührt.



ist; wir bezeichnen ihn in der Vektorsymbolik als „Vektor-Produkt" von c und λ und schreiben dafür $c \wedge \lambda$. Die vektorielle Zusammenfassung der drei Gleichungen (5) gibt somit

$$\frac{\partial c}{\partial t} - 2c \wedge \lambda + \operatorname{grad} g H = 0 \tag{5'}$$

und die Komponenten-Gleichung für die x-Richtung lautet:

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} - 2c_y \lambda_z + 2c_z \lambda_y + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \tag{5''}$$

Um aus (5) die Funktion H, die p enthält zu eliminieren, differenzieren wir die erste Gleichung nach n, die zweite nach s und subtrahieren; hierauf die zweite nach m und die dritte nach n und subtrahieren wieder. Verfährt man analog mit der dritten und ersten, so erhält man im ganzen drei neue Gleichungen, die das H nicht mehr enthalten. Wir können sie sofort zu einer Vektorgleichung zusammenfassen, denn die an (5) durchgeführte Operation ist nichts anderes als die Bildung des Rotors eines jeden der drei Vektoren, deren Summe in (5') gleich Null gesetzt ist. Der Rotor eines grad verschwindet, und es wird:

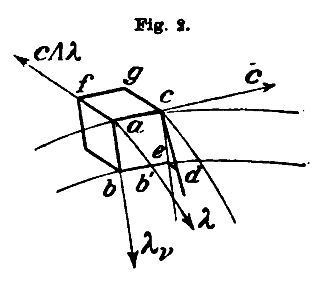
$$\operatorname{rot} \frac{\partial c}{\partial t} - 2 \operatorname{rot} c \wedge \lambda = 0$$

oder

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \operatorname{rot} c \wedge \lambda. \tag{6}$$

Von den Komponentengleichungen, deren Ausdruck (6) ist, sind nur zwei voneinander unabhängig; für die Geschwindigkeitsverteilung gilt aber außer (6) noch die davon unabhängige Gleichung (B). Ersetzt man also in (6) die Komponenten von λ durch die entsprechenden Differentialquotienten von c, so hat man im ganzen *zur Bestimmung der drei Komponenten von c drei unabhängige Differentialgleichungen*, die wir als die Helmholtzschen Gleichungen bezeichnen wollen.

Fig. 2.



4. Um das Resultat möglichst anschaulich zu deuten, gehen wir von zwei Punkten a und b (Fig. 2) aus, die in der Richtung $d\nu$ des Vektors λ_ν einander benachbart sind, ziehen durch beide die Stromlinien und legen durch a und einen Punkt c der ersten die Richtungslinie, die λ_ν an diesen Stellen zu der betrachteten Zeit hat. Die vier Linien klaffen an der Stelle $d - e$ um einen Betrag, der nach dem früheren gleich $ds . d\nu$-mal der in die Richtung af von $c \wedge \lambda$ fallenden Komponenten des $\operatorname{rot} c \wedge \lambda$ sein muß. Nach (6) ist diese Komponente

gleich der entsprechenden von $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$; man entnimmt daraus, daß die Richtungslinie von λ_v, somit auch die von λ, die dem Zustande des anfänglich in a befindlichen Teilchens bei seiner Lage in c nach der Zeit dt zukommt, die Stromlinie durch b trifft; d. h. *eine Wirbellinie bewegt sich so, daß sie in jedem Augenblick auf den Stromlinien, die durch sie hindurchgehen, gleitet.*

Wir betrachten jetzt die in die Richtung ab fallende Komponente des rot$(-c \wedge \lambda)$. Sie besteht aus der Größenänderung von $c\lambda_v$ mit dem Fortschreiten von a nach c, also dem Betrage

$$\frac{\partial}{\partial s}(c\lambda_v) = c\frac{\partial \lambda_v}{\partial s} + \lambda_v \frac{\partial c}{\partial s},$$

und dem Einfluß der Drehung von $c \wedge \lambda$ bei Fortschreiten von a nach f, hervorgerufen durch die dabei erfolgende Drehung der Geschwindigkeitsrichtung um die Achse ab, somit der Größe

$$-c\lambda_v \frac{cg - af}{af \cdot ac}.$$

Da $cg \cdot cd$ der Querschnitt des Stromfadens ist, der bei a die Fläche $ab \cdot af$ aufweist, so gilt zufolge der Kontinuitätsgleichung

$$c(cg - af)ab + c(cd - ab)af + \frac{\partial c}{\partial s} ac \cdot ab \cdot af = 0.$$

Somit erhält man, nach gehöriger Reduktion, für die ins Auge gefaßte Rotorkomponente den Ausdruck

$$c\frac{\partial \lambda_v}{\partial s} + \frac{cd - ab}{ab \cdot ac} c\lambda_v$$

und, wenn man nach Gleichung (6) dies gleich $-\frac{\partial \lambda_v}{\partial t}$ setzt, ferner $ac = cdt$ schreibt:

$$\left(\frac{\partial \lambda_v}{\partial t} + c\frac{\partial \lambda_v}{\partial s}\right)dt = \frac{\lambda_v}{ab}(cd - ab);$$

d. h. die Stromlinien durch a und b gehen auf der Strecke ds *in demselben Maße auseinander, als die Größe von* λ_v *eines Teilchens auf dieser Strecke wächst* (I′). Da das Volumen eines Teilchens, daher das Produkt aus dem Abstande der Stromlinien und dem senkrecht zu λ_v gemessenen Querschnitt, konstant bleibt, folgt, daß das Produkt dieses Querschnittes in λ_v oder die *Wirbelstärke des Volumelementes sich bei der Bewegung nicht ändert* (I).

Zieht man nach der Zeit dt durch c die Wirbellinie, so trifft sie nach unserem früheren Satze die zu b gehörige Geschwindigkeitsrichtung. Da nun längs einer Wirbellinie die Wirbelstärke jederzeit konstant ist,

so kann zufolge (I) sich in dem Schnittpunkt nur ein Teilchen befinden, das auch vor der Zeit dt mit a auf derselben Wirbellinie lag. Die Wirbellinien bewegen sich also derart, daß sie immer Wirbellinien bleiben; man sagt: *die Wirbelfäden haben materiellen Bestand* (II).

In der Kontinuitätsgleichung und den von Helmholtz herrührenden Sätzen (I) und (II) ist alles enthalten, was sich aus dem Gleichungssystem (A), (B) durch Elimination des Druckes über den Verlauf der Geschwindigkeit folgern läßt. Bezeichnet dl das Wegelement in der Richtung von λ, so gibt eine mit unserer geometrischen Überlegung parallel gehende analytische Umformung von (6) die Gleichung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + c\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \lambda\frac{\partial c}{\partial l}. \tag{7}$$

In besonders einfacher Weise spezialisieren sich die Betrachtungen für *stationäre* Bewegung, bei der Geschwindigkeit und Druck von der Zeit unabhängig, also die Stromlinien *dauernd dieselben* sind. Man kann folgende Sätze unmittelbar an die Gleichung

$$2c \wedge \lambda = \operatorname{grad} gH \tag{5a}$$

anschließen, oder aus (I) und (II) ableiten: *Die Stromlinien der stationären Bewegung lassen sich zu Flächen zusammenfassen, auf denen auch die Wirbellinien liegen; für jede Fläche ist $H =$ konst.; der Abstand zweier benachbarter Stormlinien auf einer Fläche ist dem Werte von λ_ν proportional.*[1])

5. Alle vorstehenden Ableitungen gelten naturgemäß nur *innerhalb* eines räumlichen Stetigkeitsgebietes, da sie auf örtlichen Differentiationen beruhen. In den Punkten einer Fläche, längs der zwei Stetigkeitsgebiete aneinander grenzen, sind nur diejenigen Gleichungen ohne weiteres aufrecht zu erhalten, die lediglich Differentiationen nach Richtungen, die auf dieser Fläche liegen, enthalten. An Unstetigkeitsflächen, die stets von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet werden (vgl. § 1, 3), beherrscht man die Verhältnisse durch den folgenden auch sonst oft nützlichen Satz, der eine Folgerung von (I) und (II) darstellt: *Bezeichnet F eine feste oder veränderliche Fläche, die dauernd aus denselben Teilchen besteht, so ist für jedes in unendlicher Nähe befindliche Teilchen der senkrechte Abstand von F zu jeder Zeit der zu F normalen*

1) Es muß nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Bezeichnung des rot c als „Wirbel" dem Sprachgebrauch oft stark widerspricht. Eine Strömung in geraden parallelen Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit jedes Teilchens hat an jeder Stelle einen „Wirbel", wenn c nicht an allen Punkten dasselbe ist; dagegen ist eine Bewegung in koaxialen Kreisen „wirbelfrei", wenn c dem Radius umgekehrt proportional ist.



Komponente seines Rotors proportional (III). Will man den Wirbelbegriff allgemein auf die Vorgänge an Grenzflächen zweier Stetigkeitsgebiete ausdehnen, so gelangt man zu der von Helmholtz begründeten Theorie der Wirbel*schichten;* die aus derselben sich ergebenden Schlüsse gehen jedoch nicht über den Inhalt des Satzes (III) hinaus.

Helmholtz hat auch gezeigt, daß das konsequente Festhalten an der Theorie idealer Flüssigkeiten die Existenz von *Integralen mit Unstetigkeitsflächen* im Innern ergibt. Solche treten immer auf, wenn die überall stetige Lösung der Differentialgleichungen zu einem negativen Wert für den Druck p an irgend einer Stelle führt, und ergeben dann neben einem Gebiet stetiger Strömung ein Gebiet *ruhender* Flüssigkeit, für das also $c = 0$, $P =$ konst. ist.

6. Bezeichnet $\boldsymbol{v}$ die *relative* Geschwindigkeit eines Wasserteilchens, bezogen auf einen mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden starren Körper, ds' das Wegelement der Relativbahn, ferner $\frac{d\boldsymbol{v}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{v}$ an dem bestimmten Punkte des Bezugskörpers, wie sie von diesem Körper aus gesehen erscheint; so hat man, um die in die Newtonsche Gleichung einzuführende Beschleunigung $\boldsymbol{w}$ zu erhalten, zu der Relativbeschleunigung

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{\partial t} + v\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s'}$$

die Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{b}$ und die Coriolis-Beschleunigung mit der x-Komponente

$$2(\omega_y v_z - \omega_z v_y)$$

hinzuzufügen. Es ist also

$$w_x = \frac{\partial y_x}{\partial t} + v\frac{\partial v_x}{\partial s'} + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + b_x$$

oder

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{\partial t} + v\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s'} + 2\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}.$$

Die Überlegungen, welche uns aus der Gleichung (A) die Gleichung (6) gewinnen ließen, zeigen, daß, wenn an Stelle der absoluten Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ die relative $\boldsymbol{v}$, an Stelle des Rotors von $\boldsymbol{c}$ jetzt $2\boldsymbol{\lambda}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ eingeführt wird, in (6) noch der *Rotor der beiden Zusatzglieder der Beschleunigung* hinzutritt. Wir erhalten somit

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}'}{\partial t} - 2\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\lambda}' + 2\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v} + \operatorname{rot}\boldsymbol{b} = 0.$$

Die Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ hat an jeder Stelle den Rotor $2\boldsymbol{\omega}$, der Rotor der Beschleunigung $\boldsymbol{b}$ eines beliebig bewegten starren Körpers

ist $2\frac{d\omega}{dt}$. Setzt man diese Werte in die Gleichung ein und beachtet, daß $\lambda' + \omega = \lambda$ ist, so ergibt sich

$$\left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\lambda'}{\partial t}\right) - \operatorname{rot} v \wedge \lambda = 0, \tag{8}$$

und da auch

$$\operatorname{div} v = 0,$$

so muß ein Beobachter im bewegten Raume zu folgender Interpretation gelangen: *Es gibt zu jeder Zeit einen im ganzen Gebiet konstanten Vektor ω, der zu den beobachteten Wirbeln hinzugefügt zu Wirbellinien von materiellem Bestand und konstanter Wirbelstärke führt.* Ist z. B. die Relativbewegung stationär, d. h. $\frac{dv}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ („relativ-stationäre Bewegung") und ω konstant, so gibt es Flächen konstanten Wertes von H', einer sofort zu untersuchenden Funktion, auf denen relative Stromlinien und absolute Wirbellinien einander kreuzen.

7. Kennt man die Geschwindigkeit der Relativbewegung in jedem Punkte, so läßt sich die Druckverteilung aus (5) bestimmen, wenn man hier beim Übergang zu den Relativgrößen zu $\operatorname{grad} H$ noch die Summe der Zusatzbeschleunigungen $b + 2\omega \wedge v$ hinzufügt. Hat die Führungsbeschleunigung ein *Potential*, was dann der Fall ist, wenn ω konstant ist, d. h. die Drehachse sich selbst parallel bleibt, und die Winkelgeschwindigkeit sich nicht ändert, so kann man (8) auf die Form bringen:

$$\frac{d\lambda}{\partial t} - v \wedge \lambda = \operatorname{grad} gH' \tag{8'}$$

mit

$$H' = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h - \frac{\omega^2 r^2}{2} - b_0 z, \tag{9}$$

wobei b_0 die konstante Beschleunigung der Achse, r den senkrechten Abstand eines beliebigen Punktes von der Achse, z den in der Richtung von b_0 gemessenen Abstand von einer festen, zu b_0 senkrechten Ebene bedeutet. Die letzten beiden Glieder in (9) bilden das Potential der Führungsbeschleunigung. Die Funktion H' soll gelegentlich als *„relative Strömungsenergie"* bezeichnet werden.

§ 3. Theorie zäher Flüssigkeiten.

1. Zahlreiche Beobachtungen, welche Folgerungen aus der bisher vorgetragenen Theorie, soweit sie sich auf Gleichgewichtszustände des Wassers beziehen, bestätigen, ihnen im Falle der Bewegung widersprechen, führten dazu, die Annahme, durch die in § 1 die „ideale"

Flüssigkeit charakterisiert wurde, fallen zu lassen und durch eine neue zu ersetzen. Die geänderte Auffassung, welche auf eine Idee Newtons zurückgeht und von Navier in bestimmter Weise formuliert wurde, besteht darin: Es werden der Flüssigkeit auch *Tangentialspannungen* zugeschrieben, die sich im Innern an jeder Stelle durch die daselbst herrschende *Geschwindigkeit der Deformation*, an der Oberfläche eventuell auch durch die *Relativgeschwindigkeit* gegenüber den angrenzenden Körpern bestimmen.

2. Die auf die Längeneinheit bezogene Dehnung in der x-Richtung, die ein Wasserelement in der Zeiteinheit erfährt, ist

$$\varepsilon_x = \frac{\partial c_x}{\partial x};$$

die sekundliche Winkeländerung eines mit y, z gleichgerichteten Winkels:

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y}\right).$$

Die Größen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sind den in der Elastizitätslehre auftretenden Dehnungs- und Schiebungskomponenten analog und lassen sich, ebenso wie die Spannungsgrößen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_x, \tau_y, \tau_z$ als die sechs Komponenten eines höheren Vektorgebildes, der *„symmetrischen Dyade"* ansehen, das in bekannter Weise durch ein dreiachsiges Ellipsoid veranschaulicht werden kann (Spannungs-, Deformations-Ellipsoid usw.). In jeder Hauptebene des Ellipsoids gibt es zwei zueinander senkrechte, die Winkel der Hauptachsen halbierende Richtungen, in denen die Tangentialspannung τ, bzw. die „relative Gleitgeschwindigkeit" γ einen Extremwert annimmt. Bezeichnet τ_1 den Extremwert in der durch die Hauptspannungen σ_2 und σ_3 bestimmten Ebene, so gilt $2\tau_1 = \sigma_2 - \sigma_3$, so daß bei konsequenter Festsetzung der Zeichen $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ wird; durch die *drei Hauptwerte der Schubspannungen* und ihre Richtungen sind somit für alle Schnittebenen die Tangentialspannungen *vollständig*, die Normalspannungen *nur bis auf eine für alle gleiche additive Konstante* festgelegt.

3. Die Forderungen, die wir aus *Symmetriegründen* an die Art des Zusammenhanges zwischen Spannungsdyade und Dyade der Deformationsgeschwindigkeit zu stellen haben, sind die: es müssen die Hauptachsen der beiden Ellipsoide zusammenfallen, oder was dasselbe ist, die Richtungen der extremen Tangentialspannungen mit denen der extremen Gleitgeschwindigkeiten; es muß ferner die Funktion

$$\tau_1 = \tau(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

die einen Hauptwert der ersten Dyade durch die drei Hauptwerte der

zweiten ausdrückt, in γ_2 und γ_3 symmetrisch sein. Die Hauptnormalspannungen erscheinen damit in der Form

$$\sigma_1 = -p + \sigma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

wobei p von der Bewegung der Flüssigkeit nicht *explizit* abhängt.

Bisher hat man es ausschließlich versucht, mit dem *linearen* Ansatz auszukommen, dessen allgemeinste Form

$$\sigma_1 = -p + 2\nu'\varepsilon_1 \ldots, \quad \tau_1 = 2\nu'\gamma_1 \ldots$$

lautet, wobei ν' eine Konstante vorstellt; *es scheint auch nicht, daß man durch eine Erweiterung dieses Ansatzes derzeit größere Übereinstimmung der Theorie mit den Erfahrungsresultaten erwarten darf.* Die Spannungskomponenten für ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz sind jetzt gegeben durch

$$\sigma_x = -p + 2\nu' \frac{\partial c_x}{\partial x} \cdots, \quad \tau_x = \nu' \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \right) \cdots, \tag{10}$$

woraus man ersieht, daß p der Mittelwert der drei Normalspannungen in irgend drei zueinander rechtwinkligen Richtungen ist; die Bezeichnung von ν' als „*Koeffizient der inneren Reibung*" wird verständlich, wenn man an eine Strömung in geraden parallelen Bahnen bei konstanter Geschwindigkeit jedes Teilchens denkt: hier wird $\tau_y = \tau_z = 0$ und $\tau_x = \nu' \frac{\partial c_x}{\partial y}$.

4. Die Resultierende aus sämtlichen auf ein Volumelement dx, dy, dz wirkenden Spannungskräften hat, auf die Volumeinheit reduziert, die x-Komponente

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu' \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right) \equiv -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu' \nabla^2 c_x,$$

so daß man als Bewegungsgleichung für die zähe Flüssigkeit an Stelle der Eulerschen Gleichung (A) mit $\nu = \frac{\nu'}{\mu}$ die Stokessche Gleichung erhält:

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c \frac{\partial c_x}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \nabla^2 c_x = 0 \tag{11}$$

und bei vektorieller Zusammenfassung, an Stelle von (A'):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} + \operatorname{grad} P = \nu \nabla^2 c \equiv -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} c, \tag{11'}$$

da die leicht zu erweisende Identität besteht:

$$\nabla^2 c_x \equiv -2\left(\frac{\partial \lambda_y}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_z}{\partial y} \right).$$

Eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung des Zusatzgliedes gibt folgende Definition von $\nabla^2 \boldsymbol{c}$: denkt man sich um einen Punkt mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ eine kleine Kugel vom Radius r gelegt und bildet den Mittelwert aller Geschwindigkeiten in den Punkten der Kugeloberfläche, so weicht dieser im limes für $r = 0$ von $\boldsymbol{c}$ um $\nabla^2 \boldsymbol{c}$ ab.

Aus der Stokesschen Gleichung und den durch Umformung analog wie in § 2 gewonnenen:

$$\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial t} - 2\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{\lambda} + \operatorname{grad} gH = -2\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} - \operatorname{rot} \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{\lambda} + \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{13}$$

erkennt man, daß die Helmholtzschen Wirbelsätze im allgemeinen nicht mehr erfüllt sind, daß aber eine dauernd wirbelfreie Bewegung auch trotz der Zähigkeit möglich ist; ebenso bleibt eine Strömung mit rotorfrei verteiltem (z. B. dem Ort nach konstantem) Wirbel von der Zähigkeit unbeeinflußt. Ausgeschlossen erscheinen hingegen Lösungen mit Unstetigkeitsflächen im Innern.

5. Für die sog. *äußere Reibung* erhält man den allgemeinsten Ansatz in

$$\boldsymbol{\tau} = R(c) \cdot \boldsymbol{c},$$

wobei $\boldsymbol{\tau}$ die Tangentialspannung an der Oberfläche nach Größe und Richtung bedeutet und die Funktion R mit $c = 0$ verschwindet, sonst negative Werte hat, im übrigen aber von der Materialbeschaffenheit abhängt. Kirchhoff hat für die Bewegung längs starrer Führungsflächen $R =$ konst. gesetzt, es ist aber im allgemeinen üblich, in der Vereinfachung noch weiter zu gehen: man nimmt an, *R verschwinde an freien Oberflächen* und sei an festen Flächen gleichsam unendlich, d. h. die Flüssigkeit *hafte (mit der Geschwindigkeit Null) am Rande.* Vermutlich wird sich diese Auffassung nur aufrecht erhalten lassen, wenn man die starren Wände nicht als geometrisch glatte Flächen betrachtet, sondern die kleinen Unebenheiten, die ihre „Rauhigkeit" ausmachen, entsprechend in Rechnung setzt. Man erkennt, daß das Vorhandensein der Reibung am Rande das Zustandekommen der oben erwähnten von Tangentialspannungen freien Bewegungsformen, wenigstens zwischen festen Führungen, stets verhindert.

6. Kennt man für irgend eine Strömung den Wert von $\boldsymbol{c}$ an jeder Stelle, so läßt sich der *Spannungszustand* ohne weiteres finden; denn die zusätzlichen, von der Zähigkeit herrührenden Komponenten sind in jedem Punkte durch die Werte von $\boldsymbol{c}$ in der Umgebung bestimmt, während man den Verlauf des mittleren Druckes p aus einer der Glei-



chungen unter 4, die H oder P enthalten, ermittelt. Wie früher wollen wir gH wieder als Ausdruck einer *„Strömungsenergie“* auffassen, die aber jetzt auch bei stationärer Strömung für ein Teilchen nicht dauernd erhalten bleibt, sondern sich längs einer Stromlinie der stationären Bewegung um $\int T\,ds$ ändert, wenn T die in die Richtung von c fallende Komponente der von den Zähigkeitsspannungen herrührenden Beschleunigung bedeutet. Man findet, mit

$$(14)\qquad \sigma_x' = \sigma_x + p, \quad \sigma_y' = \sigma_y + p, \cdots$$

$$(15)\quad T = \frac{1}{\mu c}\left[c_x\left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z}\right) + c_y\left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z}\right) + \cdots\right],$$

und bei Annahme der linearen Beziehung zwischen Spannung und Deformations-Geschwindigkeit:

$$(15')\qquad T = \frac{\nu}{c}\left[c_x \nabla^2 c_x + c_y \nabla^2 c_y + c_z \nabla^2 c_z\right],$$

schließlich als Bewegungsgleichung der c-Richtung

$$(16)\qquad \frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial s} - T = 0,$$

worauf wir später (§ 10) zurückgreifen werden.

7. Eine quantitativ richtige Darstellung der beobachtbaren Bewegungserscheinungen des Wassers hat man auf Grund der Stokesschen Gleichungen bisher *nur in sehr beschränktem Maße* geben können. Die Geschwindigkeitsverteilung im geraden kreiszylindrischen Rohr vom Radius r_0 und dem Druckgefälle J entspricht dem von Poiseuille gefundenen Integral

$$c = \frac{J}{4\mu}(r_0^2 - r^2)$$

nur dann, wenn das Produkt aus der durchschnittlichen Geschwindigkeit C und dem Kreisradius unterhalb einer sehr niedrigen „kritischen“ Grenze bleibt, die nach Angaben von Reynolds für Wasser von 4° C bei 0,0016 liegt (C und r_0 in m, sec).

Andernfalls läßt sich nach Boussinesq die beobachtete Geschwindigkeitsverteilung der geradlinigen Strömung wiedergeben, wenn man in die Gleichungen anstelle von ν einen von Ort zu Ort veränderlichen Koeffizienten ε einführt und ferner einen von der Randgeschwindigkeit c_0 abhängigen Koeffizienten R der äußeren Reibung benützt. So soll für den oben genannten Fall[1])

$$c = c_0\left[1 + k\left(\frac{r^3}{r_0^3}\right)\right]$$

1) Boussinesq, Théorie de l'écoulement tourbillonant . . ., 1. mém., Paris 1907, p. 33.

werden, mit

$$\varepsilon = k' c_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad R = 3 k k' c_0,$$

wobei k und k' nur von der Beschaffenheit der Wände und des Wassers abhängen. Eine qualitative Erklärung der Abweichung des ε von ν findet man in der Tatsache, daß die wirklich eintretende Bewegung weder geradlinig noch stationär ist, sondern *zahlreiche und dichtgedrängte Pulsationen nach Ort und Zeit aufweist;* die Wirkung dieser äußert sich dann in der Weise, daß die *scheinbar* geradlinigen Stromfäden eine größere *scheinbare* Tangentialspannung aufeinander ausüben.

Der Grundgedanke der Boussinesqschen Theorie besteht nun darin, daß die aus Beobachtungen an zylindrischer Strömung gewonnene Kenntnis von ε und R auf andere, allgemeinere Strömungsformen übertragen wird. Die der groben Messung zugänglichen Mittelwerte der Geschwindigkeit und des Druckes *genügen nach Boussinesq allgemein einem Gleichungssystem, das aus dem Stokesschen entsteht, wenn man darin die Konstante ν durch das veränderliche ε ersetzt.*

Wir werden im zweiten Abschnitt dieser Arbeit eine Auffassung begründen, die es uns ermöglicht, in ähnlicher Weise, — und zwar im Sinne einer *vorläufigen Näherungstheorie, — die Helmholtzschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten zur Darstellung der wirklich beobachtbaren Geschwindigkeitsverteilung strömenden Wassers heranzuziehen.* Wir werden zu diesem Zwecke zu zeigen haben, daß man zur Bestimmung einer Bewegung, die jenen Gleichungen genügt, neben den unmittelbar gegebenen Randbedingungen noch eine frei verfügbare Annahme in der Hand hat, durch welche man sich den Beobachtungsergebnissen anpassen kann. Der *Druckverlauf* wird dann auf Grund davon unabhängiger experimenteller Beobachtungen bestimmt.

In den folgenden Ausführungen sollen daher zunächst Folgerungen aus den Helmholtzschen Gleichungen durchgearbeitet werden.

§ 4. Zweidimensionale Strömungsprobleme.

1. Eine wesentliche Vereinfachung erfahren die hydrodynamischen Gleichungen, wenn die Zahl der unabhängigen Variabeln auf *zwei* beschränkt wird. Wir betrachten hier nur den Fall, daß die Bewegung *stationär* ist, die beiden unabhängig Veränderlichen also Koordinaten bedeuten; dann ist es in der Regel möglich, die abhängig Variablen auf eine einzige, eine sog. „Stromfunktion“ zurückzuführen.

Die Reduktion des Problems auf ein zwei- oder eindimensionales kann im allgemeinen *in zwei wesentlich voneinander verschiedenen Weisen* geschehen.



a) Man nimmt an, daß die Stromlinien auf einer von vornherein gegebenen einfach unendlichen Flächenschar verlaufen (event. mit einer doppelt unendlichen Kurvenschar zusammenfallen). Diese Bedingung läßt sich in der Weise *annähernd verwirklichen*, daß zwischen den ohnehin vorhandenen Führungsflächen genügend viele, hinreichend dünne Zwischenwände eingeschaltet werden. Von den vier skalaren Größen, die Druck und Geschwindigkeit in einem Punkte darstellen, werden also eine (bzw. zwei) als unmittelbar gegeben angesehen; zur Bestimmung der übrigen hat man neben der Kontinuitätsgleichung zwei Komponenten (bzw. eine Komponente) der Eulerschen Gleichung (A') zur Verfügung, nämlich diejenigen, die man durch Anwendung von (A') auf zwei in der Tangentialebene gelegene Richtungen (bzw. die Stromlinienrichtung) erhält. Die unendlich vielen, unendlich dünnen Führungsflächen, die zu einer *exakten Verwirklichung* der Bewegung erforderlich wären, sind im Sinne von § 1, 3, ob sie nun fest oder bewegt sind, als Unstetigkeitsflächen anzusehen, die dauernd dieselben Flüssigkeitsteilchen enthalten. Will man daher im zweidimensionalen Falle die Bestimmung der Geschwindigkeiten von der des Druckes trennen, so erhält man als Resultat der Elimination von P aus den erwähnten beiden Komponentengleichungen von (A') den Ausdruck unseres Satzes (III). Die weitere Ausführung dieser Reduktionsmethode wollen wir als *Theorie der Stromschichte*, (bzw. des Stromfadens) bezeichnen.

b) Man erreicht auch eine Verminderung der Zahl der unabhängigen Veränderlichen, wenn man Bewegungen untersucht, bei denen c von einer oder von zwei Koordinaten eines räumlichen Koordinatensystems unabhängig ist. Die Verwirklichung solcher Strömungen ist durch geeignete Wahl der Randbedingungen *in exakter Weise* möglich, wobei in jedem Punkte des Innern alle vier Differentialgleichungen für c und P erfüllt sind. Beispiele hierhergehöriger Bewegungsformen sind die zentrisch symmetrische und die *axial-symmetrische Bewegung*, von denen uns insbesondere die letztere (kurzweg „symmetrische Strömung") beschäftigen wird.

Es muß hervorgehoben werden, daß die beiden angeführten Problemstellungen im allgemeinen noch *nicht zu denselben Ergebnissen* führen, wenn die im ersten Falle vorzuschreibenden Führungsflächen so gewählt werden, daß sie die Schiebung nach der im zweiten Falle ausgeschalteten Koordinate gestatten.

2. Der einfachste Fall der Stromschichten-Bewegung ist der der *stationären ebenen Bewegung*. Wir verstehen darunter eine solche Strömung, bei der alle Teilchen Bahnen beschreiben, die einer bestimmten Ebene, es sei dies die xy-Ebene eines Cartesischen Koordinatensystems, parallel sind.

Aus der Definition geht hervor, daß der in der Richtung der z-Achse gemessene Abstand zweier Teilchen, somit der senkrecht zu z gemessene Querschnitt eines Volumelementes konstant bleibt; unser Satz (III) verlangt dann, *daß die z-Komponente des Rotors eines Teilchens sich nicht ändert.* Wir haben somit zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten in einer Bewegungsebene die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

und den Wirbelsatz

$$\lambda_z \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y}\right) = \text{konst}_s. \tag{18}$$

Man erkennt, daß man zu (17) und (18) auch gelangt, wenn man in (A''') und (B''') c_z und alle Ableitungen von c-Komponenten nach z gleich null setzt; es verschwindet dann notwendigerweise auch $\frac{\partial P}{\partial z}$. Daraus folgt, daß eine ebene Bewegung, bei der P längs jeder Normalen zur Ebene konstant ist, auch *ohne* Einschaltung von unendlich vielen Führungsflächen verwirklicht werden kann, also ein Beispiel zur Problemstellung b) bildet.

Die Druckverteilung in einer Bewegungsebene ermittelt man nach Kenntnis des Geschwindigkeitsverlaufes aus den beiden Komponentengleichungen[1]) von (5):

$$g\frac{\partial H}{\partial s} = 0, \quad g\frac{\partial H}{\partial n} = -2c\lambda_z. \tag{19}$$

Aus diesen geht auch der Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten H und λ_z einer Stromlinie hervor:

$$\lambda_z = -\frac{g}{2}\,\frac{\partial H}{c\,\partial n}, \quad |\lambda_z| = \frac{g}{2}\,\frac{dH}{dQ}; \tag{20}$$

dabei bedeutet dQ die Wassermenge, die (auf die Einheit der Höhe in der z-Richtung) zwischen den Stromlinien mit den Konstanten H und $H + dH$ hindurchfließt.

Gleichung (17) wird befriedigt, wenn man setzt:

$$c_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad c_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Hier ist ψ eine beliebige Funktion von x, y, die mit der Bewegung derart zusammenhängt, daß ihr, nach irgend einer Richtung R ge-

1) In der Ebene ist dn immer nach jener Seite positiv zu rechnen, die zur Richtung von c so gelegen ist, wie y zu x; der Krümmungsradius ϱ hat daher positive oder negative Werte.



nommener Differentialquotient der Größe nach gleich ist der Geschwindigkeitskomponente für die um 90° gegen R im negativen Sinne gedrehte Richtung. Man hat daher

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = c, \tag{21}$$

d. h. die Linien ψ = konst. fallen mit den Stromlinien zusammen und ψ ist bis auf eine additive Konstante gleich unserem Q. Man nennt ψ die *Stromfunktion der ebenen Bewegung.*

Führt man (21) in (18) ein, so erhält man die Differentialgleichung, die ψ erfüllen muß:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F(\psi), \tag{22}$$

wo F eine willkürliche, nicht notwendigerweise eindeutige, Funktion von ψ ist, von der Bedeutung

$$F = -2\lambda_s = g\frac{\partial H}{c\,\partial n} = \frac{g\,dH}{d\psi}, \tag{23}$$

also verschwindet, wenn die Bewegung wirbelfrei erfolgt.[1])

Die einfachsten *partikulären* Lösungen von (22) sind die der kreisförmigen Bewegung $\psi = \psi(r)$ und der Bewegung auf radialen Strahlen $\psi = \psi(\varphi)$, wobei die Verteilung der Geschwindigkeit längs r bzw. φ noch willkürlich bleibt. Soll die Bewegung wirbelfrei sein, so muß im ersten Falle cr = konst., im zweiten c von φ unabhängig, somit auch cr = konst. werden; beide Bewegungen lassen sich (wie wirbelfreie immer) übereinanderlagern und ergeben eine Strömung längs kongruenter logarithmischer Spiralen. Ein anderes Integral ist $\psi = xy$, das einer wirbelfreien Strömung längs gleichseitiger Hyperbeln entspricht. Eine große Mannigfaltigkeit von wirbelfreien Lösungen erhält man durch Anwendung der Theorie der Kugelfunktionen, der Methode der konformen Abbildungen und anderer bekannter Hilfsmittel der Potentialtheorie.

3. Im allgemeinen Fall der *räumlichen stationären* Bewegung kann man immer (und zwar in vielfacher Weise) zwei Scharen von Stromflächen φ = konst. und ψ = konst. so legen, daß

$$c = \operatorname{grad}\varphi \wedge \operatorname{grad}\psi; \tag{24}$$

jede der Flächen enthält eine Schar von Stromlinien und je zwei Flächen, die nicht derselben Schar angehören, durchdringen sich in einer Stromlinie. Dabei entspricht konstanten Werten von $d\varphi$ und $d\psi$ ein derartiges Netz von Flächen, daß durch jede vierkantige, von zwei

1) Die Gleichung rührt von Lagrange her, Œuvres T. IV, p. 720.

Paaren benachbarter Flächen gebildete Röhre dieselbe Wassermenge fließt; c steht senkrecht auf den beiden Flächennormalen a und b und hat die Größe

$$c = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial b} \sin(a,\, b).$$

Für jede Schar von Stromflächen gilt unser Satz (III) über die Normalkomponente des Rotors, den wir in der Form schreiben können[1])

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{grad}\varphi \,|\, \operatorname{rot} c &= F_1(\varphi,\, \psi) \\ \operatorname{grad}\psi \,|\, \operatorname{rot} c &= F_2(\varphi,\, \psi). \end{aligned}$$

da ja ein einer Fläche benachbartes Teilchen sich längs der Nachbarfläche derselben Schar bewegen muß, und grad φ dem Abstand einer Stromfläche von der benachbarten Fläche derselben Schar umgekehrt proportional ist.

Rechnet man aus (24) und (25) den Wert von $2c \wedge \lambda$, so erhält man

$$2c \wedge \lambda = F_1 \operatorname{grad}\psi - F_2 \operatorname{grad}\varphi,$$

und als Bedingung dafür, daß dies gleich $\operatorname{grad} gH$ sei

$$F_1 = g\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad F_2 = -g\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

wobei H als Funktion von φ und ψ erscheint. Man gewinnt also die Differentialgleichungen für φ und ψ, wenn man in

$$\text{(26)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{grad}\varphi \,|\, \operatorname{rot} c &= g\frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \operatorname{grad}\psi \,|\, \operatorname{rot} c &= -g\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

den Wert von c aus (24) einsetzt. Eine naheliegende Vereinfachung ergibt sich, wenn eine der beiden Flächenscharen von H-Flächen gebildet wird.

Die Gleichungen (24) und (26) lösen das *allgemeine Problem der Stromschichtenbewegung*, wenn man eine der Scharen φ oder ψ als von vornherein gegeben voraussetzt.

4. Für die Turbinentheorie ist der von H. Lorenz zum erstenmale untersuchte Fall[2]) wichtig, daß eine *axial-symmetrische Schar*

---

1) Die Aneinanderreihung zweier Vektoren unter Zwischensetzung eines senkrechten Striches bedeutet das „innere Produkt" derselben, d. i. den skalaren Wert, den man durch Multiplikation der Längen beider Vektoren in den cosinus des eingeschlossenen Winkels erhält.

2) H. Lorenz, Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, München und Berlin 1906. Vgl. auch die daselbst S. XII zitierten anderen Schriften desselben Verfassers.

kongruenter Flächen vorliegt, auf der die relativen Stromlinien einer relativ-stationären Bewegung verlaufen. Die Führungsflächen selbst sollen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse rotieren.

Es sei in einem Zylinderkoordinatensystem eine Fläche gegeben durch

$$\varphi = f(r, z) + \text{konst.},$$

dann ist die kinematische Bedingung für v

$$v_u = r f_r v_r + r f_z v_z. \quad \left(f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \cdots\right).$$

Setzt man dies in die Kontinuitätsgleichung (B^{IV}) ein, so wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + f_r \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r v_r) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r v_z) = 0.$$

Die in Klammern stehenden Operatoren bedeuten Differentiationen nach zwei auf den Flächen $\varphi - f =$ konst. liegenden Richtungen und sind somit zulässig. Die Gleichung wird befriedigt durch

$$r c_r = \psi_z, \quad r c_z = -\psi_r, \quad \left(\psi_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \cdots\right),$$

wobei $\psi(r, z) =$ konst. eine Schar von Drehungsflächen darstellt, deren Schnitte mit den ebengenannten Flächen die Stromlinien liefern. Die Komponenten des Rotors von c für die Richtungen von r, φ, z sind

$$\frac{\partial c_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial c_u}{\partial z}, \quad \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial (c_u r)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{r \partial \varphi},$$

die Richtungscosinus der Flächennormalen haben bis auf den Nenner $\sqrt{r^2 f_r^2 + 1 + r^2 f_z^2}$ die Werte

$$r f_r, \quad -1, \quad r f_z,$$

während der unendlich kleine Abstand zweier benachbarter Flächen dem r-fachen des reziproken Wertes jener Wurzel proportional ist. Bildet man nun den Ausdruck für die zur Fläche normale Rotorkomponente und führt zugleich den Wert für c_u gleich $v_u + r\omega$ ein, so erhält man nach einfacher Reduktion (bis auf den Nenner $\sqrt{r^2 f_r^2 + 1 + r^2 f_z^2}$):

$$(1 + r^2 f_z^2)\left(\frac{\partial}{\partial r} + f_r \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r c_z) - (1 + r^2 f_r^2)\left(\frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r c_r) +$$

$$r^2 f_r f_z \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + f_r \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r c_r) - \left(\frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(r c_z)\right] + r^2 c_r (f_r f_z - r f_r f_{zr} + f_z f_{rr}) +$$

$$r^2 c_z (f_z^2 - r f_r f_{zz} + r f_z f_{rz}) + c_z + 2 r^2 \omega f_z,$$

worin wieder, wie man erkennt und wie zu erwarten war, lediglich Differentiationen nach Richtungen *auf* der Fläche auftreten. Der vorstehende Ausdruck ist nun nach unserem Satze (III) gleich r mal einer längs jeder Stromlinie konstanten Größe zu setzen; somit gilt nach Einführung von ψ, wenn mit F eine willkürliche Funktion von ψ bezeichnen wird:

$$\psi_{rr}(1+r^2f_z^2)+\psi_{zz}(1+r^2f_r^2)-2\psi_{rz}r^2f_rf_z-\psi_z r(rf_{rr}f_z-rf_{rz}f_r+f_rf_z)+$$

$$\psi_r r\left(rf_{rz}f_z-rf_{zz}f_r+f_z^2-\frac{1}{r^2}\right)=r^2[F(\psi)+2\omega f_z]. \tag{27}$$

Dies ist die Differentialgleichung, die f und ψ erfüllen müssen, wenn ψ die Stromfunktion einer Bewegung darstellt, die auf den mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Flächen $f-\varphi=konst.$ verläuft.

Setzt man zur Abkürzung

$$n(r,z)\equiv rc_u=rv_u+r^2\omega=r(f_r\psi_z-f_z\psi_r)+r^2\omega, \tag{28}$$

so wird aus (27):

$$\psi_{rr}+\psi_{zz}-\frac{1}{r}\psi_r+r(f_rn_z-f_zn_r)=r^2F(\psi); \tag{29}$$

hier bedeuten die ersten drei Glieder, wie man leicht nachrechnen kann, das $2r$-fache der u-Komponente des Wirbels,

$$2r\lambda_u\equiv\psi_{rr}+\psi_{zz}-\frac{1}{r}\psi_r. \tag{30}$$

Die Elimination von f aus (28) und (29) gibt die Beziehung zwischen ψ und n:

$$\left(\psi_r\frac{\partial}{\partial z}-\psi_z\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{rF-2\lambda_u}{\psi_rn_z-\psi_zn_r}\right)=\left(n_r\frac{\partial}{\partial z}-n_z\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{n-r^2\omega}{r(\psi_rn_z-\psi_zn_r)}\right). \tag{31}$$

Die Bedeutung von F ist analog der aus Gl. (23) folgenden und erhellt aus der Anwendung der Sätze über Relativbewegung auf die Überlegungen des vorangehenden Absatzes:

$$F=-g\frac{\partial H'}{\partial\psi}\quad\text{mit}\quad H'=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+h-\frac{\omega^2r^2}{2}, \tag{32}$$

wobei H' als Funktion von ψ und von $f-\varphi$ aufzufassen ist. F verschwindet, wenn die Bewegung wirbelfrei ist, oder doch keine zu den Führungsflächen senkrechte Rotorkomponente aufweist.

Die *Verteilung des Druckes* über die Punkte einer Führungsfläche ergibt sich nach Kenntnis der Geschwindigkeit in jedem Punkte ohne weiteres aus der Anwendung der Eulerschen Gleichungen auf zwei Richtungen, die auf der Fläche verlaufen. Längs der relativen Stromlinie ist H' konstant, daher der Druckverlauf durch

$$P=H'-\frac{v^2-\omega^2r^2}{2g} \tag{33}$$

gegeben; zieht man durch zwei Punkte, die auf der Normalen einer ψ-Linie in der Entfernung dn_1 nebeneinander liegen, die Parallelkreise bis zum Schnitt mit der Führungsfläche, so trifft man zwei Punkte mit dem Druckunterschied

$$dP = \left[-\frac{c'^2}{\varrho_1} + \frac{c_u^2}{r}\frac{c_z}{c'} - c'\frac{\partial(rc_u)}{\partial s_1}\frac{df}{dn_1}\right]dn_1,$$

wobei c', ϱ, ds_1 Geschwindigkeit, Krümmungsradius und Bogenelement für die durch ψ dargestellte, in der Meridianebene verlaufende Strömung bedeuten. Die Elimination von P aus den beiden letzten Gleichungen würde wie erwähnt zu einer direkten Ableitung von (27) usf. zurückführen.[1])

Die Bestimmung des auf die Führungsflächen vom Wasser ausgeübten Druckes behalten wir uns für die allgemeinen Erörterungen in § 9 vor.

5. Setzt man in Gl. (29) $n = 0$, so erhält man für die Stromfunktion einer in den rz-Ebenen vor sich gehenden *„meridionalen"* Bewegung

$$\psi_{rr} + \psi_{zz} - \frac{1}{r}\psi_r = r^2 F(\psi), \tag{35}$$

und im Falle der Wirbelfreiheit, mit $F = 0$

$$\psi_{rr} + \psi_{zz} - \frac{1}{r}\psi_r = 0, \tag{35'}$$

die Gleichung der sog. Stokesschen Stromfunktion. Für letztere läßt sich eine große Anzahl partikulärer Integrale der einfachsten Form angeben, wenn man den Zusammenhang von ψ mit den einfachen *Kugelfunktionen* erster und zweiter Art verwertet.[2]) Eine auf diesem Wege gewonnene allgemeine Formel ist

$$\psi = r^2\Big[z^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}(r^2+z^2)z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}(r^2+z^2)^2 z^{n-5} + \cdots\Big],$$

---

1) Einen Versuch in dieser Richtung und zugleich den einer praktischen Anwendung, wie wir sie in § 14 durchführen werden, stellt die Arbeit von K. Körner dar: Die Schaufelung der Francis-Turbinen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., 1907, S. 1704. Vgl. auch die von Stodola veranlaßte Berichtigung, ebenda, 1908, S. 200.

2) Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Friedel, Leipzig 1907, S. 148; oder Enzykl. IV, 16 (Love), No. 1g.

z. B. $n = 1$, $\psi = r^2$
2 $r^2 z$
3 $r^2(4z^2 - r^2)$
4 $r^2 z(4z^2 - 3r^2)$
5 $r^2(8z^4 - 12r^2z^2 + r^4)$
6 $r^2 z(8z^4 - 20r^2z^2 + 5r^4)$, $\cdots\cdots$,

wobei natürlich jede lineare Kombination von Lösungen wieder eine Lösung ist. Eine weitere Klasse von Integralen ergibt sich, wenn man jedes der hier genannten durch $(r^2 + z^2)^{n+\frac{1}{2}}$ dividiert.

Dieselben Integrale können verwendet werden, wenn es sich um Beispiele für die *allgemeine Bewegung in symmetrischen Schichten* handelt. Denn man erkennt aus (28) und (29): zu jeder Stromfunktion, die (35′) erfüllt, erhält man eine zugehörige Führungsfläche, indem man n einer willkürlichen Funktion von f gleichsetzt, und dann f aus der Gleichung bestimmt

$$n(f) = r^2\omega + r(f_r\psi_z - f_z\psi_r).$$

Für $\psi = kr^2$ (rein axiale Strömung im Meridianschnitt) ist f durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{z}{2kr^2} + a(r) = \int^f \frac{df}{r^2\omega - n(f)},$$

wobei a und n willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Z. B. mit $n(f) = \alpha f$:

$$f = \frac{r^2\omega}{\alpha} + a(r)e^{-\frac{\alpha z}{2kr^2}}.$$

Für die Stromfunktion $\psi = Ar^2z + Br^2 + Cz$ und die Annahme $n = 2\varkappa Cf$ ergibt sich

$$f = \left(A + \frac{C}{r^2}\right)^{-\varkappa}\left[-\omega\int^r \frac{1}{r}\left(A + \frac{C}{r^2}\right)^{\varkappa-1} dr + a(\psi)\right],$$

$$\text{z. B. } \varkappa = 1,\quad f = \frac{r^2}{Ar^2 + C}[-\omega\ln r + a(\psi)];$$

überdies ist hier jede Zylinderfläche mit Erzeugenden parallel zur z-Achse als Führung möglich. Unsere Beispiele sind so gewählt, daß n keine Funktion von ψ allein wird, also nicht für ein Flüssigkeitselement dauernd denselben Wert behält.

6. Mit der Bewegung in axial-symmetrischen Schichten verwandt ist die relativ-stationäre, *axial-symmetrische Strömung*, die dadurch definiert ist, daß alle Geschwindigkeitskomponenten vom Polarwinkel eines Zylinderkoordinatensystems unabhängig sind. Im Zu-

sammenhang mit Problemen der Turbinentheorie ist diese Bewegungsform in eingehender Weise von Prásil[1]) studiert worden.

Die Stromlinien, sowohl die der absoluten, als die der relativen Strömung, liegen auf Drehungsflächen $\psi(r, z) =$ konst. und es können etwa die relativen in vielfacher Weise durch eine zweite Flächenschar $f(r, z) - \varphi =$ konst. festgelegt werden. Wählt man diese Flächenschar derart, daß sie mit $H' =$ konst. zusammenfällt, so müssen wegen (32) f, n und ψ sicherlich den Gleichungen genügen:

$$\psi_{rr} + \psi_{zz} - \tfrac{1}{r}\psi_r + r(f_r n_z - f_z n_r) = 0 \tag{29'}$$

$$n = r^2\omega + r(f_r\psi_z - f_z\psi_r). \tag{28}$$

Da *alle* Differentialgleichungen der Bewegung (A^{IV}) (B^{IV}) erfüllt sein müssen, besteht für ψ, f, n noch eine *dritte* Gleichung, die man aus (A^{IV}) am einfachsten in folgender Weise ableitet: Wenn alle c-Komponenten von φ unabhängig sind, müssen es auch $\frac{\partial P}{\partial z}$ und $\frac{\partial P}{\partial r}$ sein, also kann $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ nur einen im ganzen Raum konstanten Wert $-K$ haben. Die zweite der Gl. (A^{IV}) ergibt also

$$c_r\frac{\partial(c_u r)}{\partial r} + c_z\frac{\partial(c_u r)}{\partial z} = K,$$

oder mit den jetzigen Bezeichnungen

$$\psi_z n_r - \psi_r n_z = Kr. \tag{36}$$

Setzt man diesen Wert in (31) ein, so erhält man für ψ und n die weitere Gleichung:

$$\left(\psi_z\frac{\partial}{\partial r} - \psi_r\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\lambda_u}{r}\right) = -\frac{nn_z}{r^3}. \tag{37}$$

Die Stromfunktion ψ und das Geschwindigkeitsmoment n der symmetrischen Strömung sind durch die beiden Gleichungen (36) und (37) bestimmt; die Flächen, auf denen die relative Strömungsenergie konstant ist, erhält man aus (28) oder (29').

Die Gleichung (36) bringt, wie man leicht erkennt, einen einfachen Satz zum Ausdruck: die Änderung, die in der Zeiteinheit der Wert $c_u r$ eines Flüssigkeitsteilchens erfährt, ist an *allen Stellen und zu jeder Zeit dieselbe;* sie ist umgekehrt gleich der Änderung, die P bei Fortschreiten

1) Über Flüssigkeitsbewegung in Rotationshohlräumen, Zürich 1903, S. A. Schweizer Bauzeitung, Bd. 41; Die Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen, Zürich 1907, S. A. Schw. Bauz., Bd. 48.



auf dem Parallelkreis um die Winkeleinheit erfährt. Aus der Definition der Wirbelkomponenten für Zylinderkoordinaten

$$2\lambda_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial(c_u r)}{\partial z}, \quad 2\lambda_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(c_u r)}{\partial r}$$

folgert man: *Die Kurven $n =$ konst. sind zugleich die Meridiane der Drehungsflächen, auf denen die Wirbellinien verlaufen,* und stehen zu 2λ in derselben Beziehung wie die ψ-Linien zu c. Verschwindet K, bleibt also n für jedes Teilchen und P auf jedem Parallelkreis konstant, so fallen die n- und ψ-Linien zusammen, d. h. Strom- und Wirbellinien kreuzen sich auf Drehungsflächen, für die ψ, n und H' konstant sind. Verschwindet auch λ_u, so ist die Bewegung wirbelfrei und ψ geht in die Stokessche Stromfunktion über, für die wir oben Beispiele gebracht haben. Im allgemeinen liefern die Integrale des vorigen Abschnittes keine Lösungen für das Problem der symmetrischen Bewegung; umgekehrt aber lassen sich zu jeder Lösung ψ, n von (36) und (37) unendlich viel verschiedene symmetrische Flächenscharen angeben, auf denen die relativen Stromlinien verlaufen; jede einzelne Schar wird durch die Verfügung über eine einzige, eine Stromlinienschar zusammenfassende Kurve ausgewählt.

7. Um zu *Beispielen* für die symmetrische Bewegung zu gelangen, gehen wir von der Frage aus, wann eine Stokessche Stromfunktion unser Gleichungssystem (bei nicht verschwindendem K) befriedigt. Aus (37) folgt, daß dann n_z, und aus (29′), daß auch f_z verschwinden muß: die H'-Flächen sind also Zylinder mit Erzeugenden parallel zur Achse, die n-Linien fallen mit den Erzeugenden zusammen; es ist das der einzige Fall, in dem die f- und n-Linien einer symmetrischen Strömung identisch werden. Durch Einsetzen in (39) findet man, daß ψ_z von z unabhängig sein muß; also gelangt man zu dem Ansatz

$$\psi = z a(r) + b(r), \quad n = K\int\frac{r\,dr}{a} + \text{konst.},$$

wobei a und b den gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen müssen:

$$a(r^2 a''' - 3ra'' + 3a') - a'(r^2 a'' - ra') = 0$$

$$a\frac{d}{dr}\left(\frac{b''}{r^2} - \frac{b'}{r^3}\right) - b'\left(\frac{a''}{r^2} - \frac{a'}{r^3}\right) = 0.$$

Die erste hat das allgemeine Integral

$$a = Ae^{Cr^2} + Be^{-Cr^2}$$

und das singuläre

$$a = Ar^2 + B,$$

mit A, B, C als willkürlichen Konstanten. Die zugehörigen Ausdrücke für b sind im *ersten* Falle:

$$b = A' e^{Cr^2} + B' e^{-Cr^2},$$

wobei C denselben Wert hat wie in dem Ausdruck für a, während A' und B' konstant sein können oder allgemeiner durch die auf den Integrallogarithmus zurückführbare Funktion

$$A', B' = \int e^{\mp Cr^2} \frac{dr}{r^3}$$

definiert werden; im *zweiten* Falle

$$b = A' r^2 + \text{konst.}$$

mit A' als einer Konstanten. Diese Beziehungen stellen eine große Mannigfaltigkeit symmetrischer Strömungen dar, die alle die Eigenschaft haben, daß ihre Stromlinien die Schiebungen längs z gestatten, da

$$\frac{c_u}{c_r} = \frac{n}{a}$$

von z unabhängig ist. Setzt man beispielsweise

$$\psi = Ar^2 z + Cr^2,$$

so wird

$$n = \frac{K}{A} \ln r + k,$$

ferner die Gleichung der Projektion einer absoluten Stromlinie

$$\varphi = -\frac{K}{2A^2 r^2} \ln r - \frac{1}{2Ar^2}\left(k + \frac{K}{2A}\right) + \text{konst.}$$

schließlich die der relativen (im ruhenden Koordinatensystem)

$$\varphi = -\frac{K}{2A^2 r^2} \ln r - \frac{1}{2Ar^2}\left(k + \frac{K}{2A}\right) - \frac{\omega}{A} \ln r + \text{konst.}$$

Mit $\psi_r = 0$ und $n_z = 0$ erhält man für die *ebene* symmetrische Bewegung die Stromfunktion

$$\psi = az + \text{konst.},$$

das Geschwindigkeitsmoment

$$n = \frac{K}{2a} r^2 + k,$$

die Gleichung der absoluten Stromlinie

$$\varphi = \frac{k}{a} \ln r + \frac{K}{4a^2} r^2 + \text{konst.}$$

und die der relativen

$$\varphi = \frac{k}{a} \ln r + \frac{r^2}{2a}\left(\frac{K}{2a} - \omega\right) + \text{konst.}$$



8. H. Lorenz hat zur Behandlung des von ihm zur Sprache gebrachten Problems der Bewegung in *symmetrischen Schichten* einen andern Weg gewählt als den hier eingeschlagenen und ist damit zu wesentlich unrichtigen Resultaten gelangt.[1]) Später haben Stodola und Bauersfeld auf verschiedene Weise gezeigt, wie man aus dem Lorenzschen Ansatz auch richtige Schlüsse ziehen kann.

Geht man statt von dem Wirbelsatze (III) von der ursprünglichen Eulerschen Gleichung (A') aus, so läßt sich diese auf den vorliegenden Fall nur derart anwenden, daß man zunächst eine *endliche* Anzahl i von diskreten Führungsflächen ins Auge faßt und dann mit i zur Grenze unendlich übergeht, also setzt (da die Strömung *relativ*-stationär ist)

$$\text{(a)} \qquad \lim_{i=\infty}\left(v\frac{\partial c}{\partial s'}\right) = -\lim_{i=\infty}(\operatorname{grad} P).$$

Es entspricht nun dem Lorenzschen Gedanken, in diese Gleichung *statt der Grenzwerte der Differentialquotienten die Differentialquotienten jener Funktionen einzuführen, in die* $c(r, \varphi, z)$ *und* $P(r, \varphi, z)$ *mit* $i = \infty$ *übergehen.* Auf der linken Seite kann man das ohne weiteres tun, da die Differentiation nach ds' durch die Einschaltung neuer Flächen nicht gestört wird; rechts ist aber noch ein *Korrekturglied* einzuführen, so daß wir erhalten:

$$\text{(b)} \qquad v\frac{\partial}{\partial s'}\left(\lim_{i=\infty} c\right) = -\operatorname{grad}\left(\lim_{i=\infty} P\right) + q,$$

worin v und c durch unser ψ und n auszudrücken sind; dabei ist q, die Lorenzsche „*Zwangsbeschleunigung*“, definiert durch

$$\text{(c)} \qquad q \equiv \operatorname{grad}(\lim_{i=\infty} P) - \lim_{i=\infty}(\operatorname{grad} P),$$

woraus hervorgeht, daß q auf v senkrecht steht, da die ds'-Komponente des Gradienten lediglich durch eine Differentation nach ds' bestimmt wird. Es ist somit zu (b) als neue und unabhängige Gleichung hinzuzufügen:

$$\text{(d)} \qquad q \,|\, v = 0.$$

Eliminiert man aus (b) und (d) q, so erhält man, wie vorauszusehen war, nichts weiter als die Bernoullische Gleichung für einen Stromfaden der Relativbewegung. Lorenz hat umgekehrt aus der als bekannt vorausgesetzten Energiegleichung die Bedingung (d) abgeleitet.

Irgendwelche weitere korrekte Schlüsse werden erst möglich, wenn man für q noch andere *neue Bedingungsgleichungen* aus der Definition

1) H. Lorenz, Neue Theorie u. Berechnung der Kreiselräder. München und Berlin 1906.

herleitet. Kennt man die Führungsflächen $f - \varphi =$ konst., auf denen die relativen Stromlinien verlaufen, so ist jetzt, analog wie oben, zu folgern, daß q auf ihnen senkrecht steht, da die Differentiationen nach den die Flächen tangierenden Richtungen durch den Grenzübergang nicht gestört werden; man hat somit

$$\text{(e)} \qquad q_r : q_u : q_s = r f_r : -1 : r f_s$$

zu setzen. Ist f nicht gegeben, so unterliegt q doch, wie Bauersfeld[1]) bemerkt hat, der *einen* Bedingung, die man durch Elimination von f aus (e) erhalten kann: es muß eine Flächenschar geben, deren Orthogonaltrajektorien die q-Linien sind, also ist nach unserer Bemerkung in § 2,2

$$\text{(f)} \qquad q \,|\, \operatorname{rot} q = 0.$$

Bezeichnet Δp den Druckunterschied auf beiden Seiten einer Führungsfläche in irgend einem Punkte, Δn die in der Normalen gemessene Entfernung von der Nachbarfläche, so läßt sich jetzt die Definition von q auch in der Form schreiben:

$$\text{(g)} \qquad q = \lim_{i=\infty} \left(\frac{\Delta p}{\Delta n}\right).$$

Mit (b), (d) und (e), sowie der Kontinuitätsgleichung liegen *sieben* Skalargleichungen zur Bestimmung der *sieben skalaren Größen* c, q, P vor, und wenn man aus ihnen q eliminiert, erhält man nach einer Reihe von Reduktionen unsere Gl. (27) usf.; geht man statt von (e), von der Bauersfeldschen Bedingung (f) aus, so gelangt man zu unserer Gl. (31). Dabei darf man sich einer beliebigen Zerlegung nach Koordinaten bedienen, hat aber zu beachten, *daß nur jene Gleichungen eine richtige mechanische Aussage enthalten, die* nach gehöriger Reduktion, soweit es sich um die ursprüngliche Variable c handelt, *lediglich Differentiationen nach Richtungen auf den Führungsflächen aufweisen. Die Verwendung der Zwangsbeschleunigung ist unstatthaft und führt zu Fehlschlüssen, wenn auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen wird; andernfalls läßt sie auf Umwegen die Gleichungen finden, die man auf Grund der Helmholtzschen Sätze unmittelbar hinschreiben kann.*[2])

1) Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1905, S. 2007.

2) In meiner Kritik der Lorenzschen Theorie (Physik. Zeitschr. 1907, S. 314) hatte ich nicht beachtet, daß die in den Eulerschen Gleichungen auftretenden lokalen Ableitungen von c sich zu einer Differentiation nach s' zusammenfassen lassen. Die Unzulässigkeit des Lorenzschen Verfahrens beginnt daher nicht mit der *Aufstellung*, sondern erst mit der *Behandlung* seiner Gleichungen. Alle meine Einwände gegen die Ergebnisse seiner Theorie bleiben unbeschränkt aufrecht und werden durch die Ausführungen der §§ 4, 14 und 15 im einzelnen gestützt.

Stodola[1]) hat dem Lorenzschen Ansatz die Bedingungsgleichungen für q hinzugefügt, die inhaltlich mit (d) und (e) übereinstimmen, und damit das richtige Gleichungssystem zwischen q, ψ, n erhalten. Er nimmt die Elimination von q nicht vor und gelangt nicht über das schon von Lorenz gefundene partikuläre Integral $\psi = r^2 z$ hinaus. Bauersfeld[2]) behandelt in einer neueren Arbeit das Problem in sachgemäßer Weise, indem er die Führungsflächen als Wirbelschichten im Sinne der Helmholtzschen Theorie auffaßt, und gelangt im wesentlichen zu demselben Resultat wie Stodola, das er noch durch Auffindung von Integralen für die Stromfunktion $\psi = kr^2$ ergänzt.

II. Abschnitt. Die Bestimmung der Strömung durch Randbedingungen.

§ 5. Potentialströmung; ebene Bewegung. Infinitesimalgeometrie der Stromlinien.

1. Von wesentlicher Bedeutung für die Hydromechanik ist die Beantwortung der Frage: *Durch Angabe welcher Umstände oder welcher mechanischer Größen wird eine einzelne Lösung der Bewegungsgleichungen für irgend ein Gebiet, somit eine bestimmte Strömung, gekennzeichnet?* Daran anzuknüpfen ist die Entwicklung von Methoden zur *tatsächlichen Herstellung der Lösung* auf Grund eines gegebenen Systems notwendiger und hinreichender Bestimmungsstücke. Soweit es sich um die stationäre Bewegung idealer Flüssigkeiten handelt, ist eine Beantwortung der Randwertfrage bisher nur für *wirbelfreie* Strömungen bekannt (dieser §, Abs. 2); für die allgemeine Bewegung in der *Ebene* läßt sich ein Resultat aus der Picardschen Untersuchung der Differentialgleichung (22) herleiten (Abs. 3). In dem vorliegenden Abschnitt unserer Arbeit stellen wir uns zunächst die Aufgabe, ausgehend von den infinitesimalgeometrischen Eigenschaften der den Grundgleichungen genügenden Stromlinienscharen (dieser §, Abs. 4—6) zu Schlüssen über die Bestimmbarkeit der allgemeinen Bewegungsformen durch Randbedingungen zu gelangen. Dabei beginnen wir mit der ebenen stationären Bewegung unter Voraussetzung idealer Flüssigkeit (§§ 6 und 7), erweitern die Resultate auf den Fall der räumlichen und nichtstationären Strömung und zeigen zugleich, wie sie sich für die Zwecke einer approximativen Behandlung der Bewegung *zäher* Flüssigkeiten verwerten lassen. (§ 8).

Eine strenge mathematische Erledigung des Randwertproblems der hydromechanischen Gleichungen wird durch unsere Untersuchung

1) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1907, S. 174.
2) Ebenda, 1907, S. 256.



nicht erreicht. Dagegen gewinnen wir die erforderlichen Hilfsmittel, um eine *näherungsweise graphische Integration* der Gleichungen in den uns interessierenden Fällen durchführen zu können.

2. Unsere Gl. (6) und die Kontinuitätsgleichung werden befriedigt, wenn man setzt

$$\lambda = 0, \quad c_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad c_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad c_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad gH = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{konst.}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{a}$$

Hier ist Φ das sog. *Geschwindigkeitspotential*, das als Funktion der Koordinaten der Laplaceschen Gleichung (a) genügt und im übrigen irgendwie von t abhängen kann. Aus den Eigenschaften von (a) folgt der bekannte Satz: *Eine wirbelfreie Strömung einer idealen Flüssigkeit ist in jedem Augenblick durch die Angabe der Normalkomponente der Geschwindigkeit auf dem ganzen Umfang des geschlossenen Strömungsgebietes und die von* $(n - 1)$ *willkürlichen Konstanten bestimmt, wenn* n *die Zusammenhangszahl des Gebietes bezeichnet.* Soweit das Gebiet von starren Führungsflächen begrenzt ist, bedeutet die Angabe der Normalkomponente der Geschwindigkeit die Kenntnis des augenblicklichen Geschwindigkeitszustandes dieser Flächen; auf der übrigen Begrenzung liefert sie an jeder Stelle die Größe der Flächenstücke, die durch die beiden Flächenscharen φ und ψ bei gegebenem $d\varphi$ und $d\psi$ (§ 4, 3) herausgeschnitten werden. Für die im Falle mehrfach zusammenhängender Gebiete verfügbaren Konstanten wird sich bei Betrachtung der allgemeinen Bewegungsform eine anschauliche Deutung finden.

3. Für die Differentialgleichung (22), welche die *ebene stationäre* Bewegung beherrscht, hat Picard den Satz bewiesen[1]): *Kennt man* ψ *auf dem ganzen Umfang eines einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes, so ist eine stetige Lösung für* ψ *im ganzen Innern desselben eindeutig bestimmt, wenn* F *verschwindet oder eine eindeutige endliche stetige Funktion ist, die nur positive und mit* ψ *wachsende Werte hat.* Die Angabe von ψ auf dem Rande bedeutet die Kenntnis der Stromlinien, soweit sie das Gebiet begrenzen, sowie die Kenntnis der zum Rande senkrechten Geschwindigkeitskomponente an den übrigen Teilen der Umgrenzung; die Funktion F von ψ gibt die Verteilung der Strömungsenergie über die bewegte Wassermenge an. Dabei kommt die Beschränkung hinsichtlich des Vorzeichens von F, da wir über das Zeichen von ψ verfügen können, darauf hinaus, daß F sein Zeichen nicht ändern darf. Wichtig ist die Bedingung, daß der absolute Wert von F mit

1) Journ. de math. 1896, p. 295.

dem von ψ wachsen muß. Hat man z. B. $F = -k^2\psi$ und am ganzen Umfang eines geschlossenen Gebietes $\psi = 0$, so gibt es für besondere, von der Form des Randes abhängige Werte von k unendlich viele Lösungen im Innern des Bereiches.

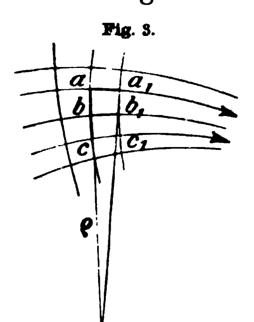
Die derart gewonnene Beantwortung der Randfrage weist vom Standpunkt der Mechanik aus zwei Mängel auf: Einmal sind die Beschränkungen, denen F unterworfen wird, (Eindeutigkeit in ψ, monotones Verhalten) in der Natur des hydrodynamischen Problems nicht begründet; zweitens ist das Ergebnis nicht anwendbar auf Bewegungsvorgänge mit teilweiser freier Oberfläche oder Unstetigkeitsflächen im Innern der Flüssigkeitsströmung.

Über die *allgemeine Natur der stetigen Lösungen* von (22) haben Picard[1]), bzw. S. Bernstein[2]) die Sätze bewiesen: Besitzt F vollständige Differentialquotienten nach ψ bis zur n-ten Ordnung, so besitzt ψ im ganzen Innern solche bis zur $(n + 1)$-ten Ordnung nach x und y[2]); ist F analytisch in ψ, so ist es auch ψ in x und y bei beliebigen Randwerten[2]). Vermutlich werden diese Untersuchungen sich auch dahin ausdehnen lassen, um den Nachweis für die weiter gehende Behauptung zu erbringen: *Bei beliebigem stetigen F sind die Stromlinien $\psi =$ konst. analytische Linien und $c = |\operatorname{grad} \psi|$ ist eine analytische Funktion der Bogenlänge s.*

Auf die Bewegung einer *beliebigen Stromschichte,* die von einer mit (22) ähnlich gebauten Differentialgleichung beherrscht wird, dürften die vorstehenden Überlegungen sich sicher dann übertragen lassen, wenn die gegebenen Führungsflächen analytisch und singularitätenfrei sind.

4. Ein *ebener Geschwindigkeitszustand* ist *graphisch* mit beliebiger Annäherung durch eine mit Koten, den Werten von ψ, versehene Schaar von Stromlinien *darstellbar*; dabei wollen wir uns von vornherein auf Strömungsgebiete beschränken, in deren Innern c stetig und von null verschieden ist. Man kann die Angabe der einzelnen Koten ersparen, wenn man die Linien so auswählt, daß sie einem *konstanten Intervall Δ* von ψ entsprechen.

Fig. 3.



Einem solchen *„Strombild“* entnimmt man den Wert von λ (wie wir jetzt statt λ_s schreiben wollen), an einer Stelle a (Fig. 3), indem man durch a und den Nachbarpunkt a_1 die Orthogonallinien a, b, c und a_1, b_1, c_1 zu den Stromlinien zieht; mit der Genauigkeit, mit der

1) Picard, Journ. de math. 1890,

2) S. Bernstein, Math. Ann. 59, 1904, S. 22.

endliche Differenzen anstelle der Differentiale gesetzt werden dürfen, hat man

$$ab = \frac{\Delta}{c}, \; bc = \frac{\Delta}{c} - \frac{\Delta}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n} ab, \; bb_1 = aa_1 - \frac{aa_1 \cdot ab}{\varrho},$$

somit, wenn als *„Form"* des Strombildes in a bzw. b der Quotient

$$\vartheta \equiv \frac{aa_1}{ab}, \; \vartheta + d\vartheta \equiv \frac{bb_1}{bc} = \frac{aa_1}{ab} + \frac{ab(bb_1 - aa_1) - aa_1(bc - ab)}{(ab)^2}$$

definiert wird, die *„Formdifferenz"*

$$d\vartheta = -\frac{aa_1}{\varrho} + \frac{\Delta}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n}\frac{aa_1}{ab} = \frac{ab \cdot aa_1}{\Delta}\left(\frac{\partial c}{\partial n} - \frac{c}{\varrho}\right) = -\frac{2\lambda}{\Delta}\, ab \cdot aa_1.$$

Die Größe des Wirbels ist also an jeder Stelle der spezifischen, auf die Flächeneinheit bezogenen, Formdifferenz τ proportional:

$$\lambda = -\frac{\Delta}{2}\frac{d\vartheta}{ab \cdot aa_1} \equiv -\frac{\Delta}{2}\tau. \tag{38}$$

Da nun die ebene stationäre Bewegung durch die Gleichungen (§ 4, 2)

$$2\lambda = \frac{c}{\varrho} - \frac{\partial c}{\partial n} = -g\frac{\partial H}{c\,\partial n} \tag{39}$$

$$c\,dn = d\psi \tag{40}$$

charakterisiert wird, so gilt der Satz: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene ebene Kurvenschaar das Strombild einer stationären Bewegung darstellt, ist die, daß die spezifische Formdifferenz τ längs jeder Linie konstant ist.* τ wird insbesondere null, wenn die Strömung wirbelfrei erfolgt; in diesem Fall lassen sich die Orthogonallinien so legen, *daß sie mit den Stromlinien durchweg kleine Quadrate bilden.* ($\vartheta = 1$.)

5. Im allgemeinen Fall der *räumlichen Bewegung* erhält man die zu c senkrechte Komponente $2\lambda_v$ des Rotors von c als Summe der Komponenten in den Richtungen der Binormalen und der Hauptnormalen (§ 2, 2):

$$\frac{c}{\varrho} - \frac{\partial c}{\partial n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial c}{\partial m}.$$

Um die zu einer bestimmten *Stromfläche* Σ normale Komponente des Rotors zu bilden, bezeichnen wir mit dn' die Differentiation in der auf der Fläche gelegenen Normalenrichtung, und zwar derart, daß ds, dn' und die positive Flächennormale so zueinander liegen wie x, y und z; dann liefern $-\frac{\partial c}{\partial n}$ und $\frac{\partial c}{\partial m}$ zusammen den Beitrag $\frac{\partial c}{\partial n'}$, und $\frac{c}{\varrho}$ den Beitrag

$$\frac{c}{\varrho}\cos\alpha = \frac{c}{\varrho'}, \quad \left(\varrho' \equiv \frac{\varrho}{\cos\alpha}\right)$$

wenn α den Winkel zwischen Binormale und Flächennormale, somit ϱ' die geodätische Krümmung der Stromlinie auf der Stromfläche bedeutet. Bei entsprechender Festsetzung über das Vorzeichen kann man somit die gesuchte Komponente von λ auf die Form bringen

$$\lambda_{\nu'} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\varrho'} - \frac{\partial c}{\partial n'}\right), \tag{41}$$

die der für die ebene Bewegung gefundenen völlig analog ist. Aus (5′) folgt jetzt:

$$\frac{c}{\varrho'} - \frac{\partial c}{\partial n'} = -g\frac{\partial H}{c\partial n'}. \tag{42}$$

Wählt man, ähnlich wie früher, die Stromlinien auf Σ bei gegebener Nachbarfläche Σ_1 so aus, daß sie einem konstanten Wert Δ der zwischendurch fließenden Wassermenge entsprechen, so kann man auch hier einen infinitesimal-geometrischen Satz über den Verlauf des Strombildes aussprechen. Durch zwei Punkte $a\ a_1$ einer Stromlinie legen wir die Orthogonaltrajektorien $a\ b\ c$ und $a_1\ b_1\ c_1$ zu den Stromlinien auf Σ und bezeichnen die Produkte von ab, bc, in die betreffenden Abstände der Punkte a und b von Σ_1 mit f und f_1. Dann ist näherungsweise

$$f = \frac{\Delta}{c},\ f_1 = \frac{\Delta}{c} - \frac{\Delta}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n}ab,\ bb_1 = aa_1 - \frac{aa_1}{\varrho'}ab;$$

somit, wenn wieder als „Form“ des Strombildes auf Σ in a bzw. a_1 der Ausdruck

$$\vartheta \equiv \frac{aa_1}{f},\ \vartheta + d\vartheta = \frac{bb_1}{f_1} = \frac{aa_1}{f} + \frac{f(bb_1 - aa_1) - aa_1(f_1 - f)}{f^2}$$

definiert wird, die „Formdifferenz“

$$d\vartheta = \frac{ab}{f}\left[-\frac{aa_1}{\varrho'} + \frac{\Delta}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n'}\frac{aa_1}{f}\right] = \frac{ab\cdot aa_1}{\Delta}\left(-\frac{c}{\varrho'} + \frac{\partial c}{\partial n'}\right) = -\frac{2\lambda_{\nu'}}{\Delta}ab\cdot aa_1.$$

Nun ist (§ 2, Satz III) $\lambda_{\nu'}$ längs jeder Stromlinie dem Abstand $d\nu$ von Σ_1 proportional, also $d\vartheta =$ konst. $ab\cdot aa_1\cdot d\nu$; *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine räumliche Kurvenschar ein Strombild darstelle, ist also die: es muß die auf die Volumeinheit der Elemente bezogene Formdifferenz auf jeder Stromfläche längs einer Stromlinie konstant sein.*

6. Für die *meridionale* Bewegung ergibt sich aus den Überlegungen, die zu dem allgemeinen Satz führten, folgende Spezialisierung. Wir ziehen die Stromlinien in der Meridianebene derart, daß sie einem konstanten Intervall $\Delta\psi$ der zwischen durchfließenden (auf den Winkelraum eins bezogenen) Wassermenge entsprechen, definieren als „Form des Strombildes *in bezug auf die Achse*“ den Quotienten

$$\frac{ds}{r\,dn}$$

und schließlich als zugehörige „Formdifferenz“ τ die durch $r \cdot ds \cdot dn$ dividierte Änderung, die der Quotient erfährt, wenn an einer Stelle zur Nachbarstromlinie fortgeschritten wird; positive Normalenrichtung ist dabei jene, die zur Bewegungsrichtung liegt, wie z zu r. Dann besteht die Gleichung

$$\tau = \frac{2}{\varDelta \psi} \frac{\lambda_u}{r},$$

und es gilt zufolge (35) der Satz: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurvenschar Strombild einer meridionalen Bewegung sei, besteht darin, daß die in bezug auf die Achse gebildete Formdifferenz längs jeder Stromlinie konstant ist.* Ist insbesondere die Strömung wirbelfrei, so bilden die Stromlinien und ihre Trajektorien Vierecke, für die $\frac{r\,dn}{ds}$ unveränderlichen Wert hat.

Eine Bewegung in beliebigen *symmetrischen Schichten* kann dargestellt werden durch die Meridianprojektion der entsprechend ausgewählten Stromlinien und die einem konstanten Wert $\varDelta f$ entsprechende Schar von Meridianschnitten $f =$ konst. Bezeichnet man mit σ den *Flächeninhalt eines kleinen Parallelogramms*, das von zwei Paaren benachbarter f- und ψ-Linien eingeschlossen wird, so gilt

$$\frac{\varDelta f \cdot \varDelta \psi}{\sigma} = f_r \psi_z - f_z \psi_r, \tag{44}$$

wenn das Vorzeichen von σ wie folgt bestimmt wird: es ist positiv, wenn die positive Normalenrichtung der f-Linie in die der ψ-Linie durch eine Drehung übergeführt wird, die der von der r-Achse nach der z-Achse gleichsinnig ist. Man hat also wegen (28)

$$n - r^2 \omega = r \frac{\varDelta f \cdot \varDelta \psi}{\sigma}. \tag{45}$$

Denken wir uns in die Figur auch noch eine Schar von Linien $n =$ konst. mit konstantem Intervall $\varDelta n$ eingezeichnet, und bedeutet σ' für die f- und n-Linien dasselbe wie σ für f und ψ, ferner τ die spezifische Formdifferenz des aus den ψ-Linien gebildeten, auf die Symmetrieachse bezogenen Strombildes, so ergibt Gl. (29)

$$\tau + \frac{1}{r\sigma'} \frac{\varDelta f \cdot \varDelta n}{\varDelta \psi} = \frac{F(\psi)}{\varDelta \psi}. \tag{46}$$

Gl. (45) und (46) geben die Infinitesimalbeziehung für eine durch die f-, n- und ψ-Linien dargestellte Bewegung in symmetrischen Schichten.

Bei einer *freien symmetrischen Strömung* muß zwischen den drei Kurvenscharen f, n, ψ noch die weitere durch (36) gegebene Beziehung bestehen. Wir nennen σ'' das Flächenstück, das durch n, ψ bestimmt

wird wie σ durch f, ψ, und bezeichnen mit c' bzw. ds_1 Geschwindigkeit und Bogenelement der *Meridianprojektion* der Bewegung, Dann gilt zunächst

$$r\sigma'' = \frac{\Delta n \cdot \Delta \psi}{K} = \text{konst.}, \tag{47}$$

ferner läßt sich zufolge der Identität

$$\psi_z \frac{\partial}{\partial r} - \psi_r \frac{\partial}{\partial z} \equiv r c' \frac{\partial}{\partial s_1}$$

für Gleichung (37) schreiben:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s_1} = -\frac{2}{\Delta \psi} \frac{n n_s}{r^4 c'}. \tag{48}$$

§ 6. Fortsetzungsverfahren für analytische Randbedingungen.

1. Es liegt nahe, und ist für den Fall wirbelfreier Bewegung auch schon versucht worden[1]), eine annähernde Darstellung des ebenen Strombildes in der Weise zu gewinnen, daß man von zwei gegebenen oder willkürlich angenommenen benachbarten Stromlinien ausgeht und *Schritt für Schritt, auf Grund unseres Satzes in § 5, 4 oder der Gleichungen (39), (40) weitere anschließende Linien konstruiert.* Diese Auffassung ist analog dem unter dem Namen der Cauchy-Lipschitzschen Methode bekannten Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Erledigung des mathematischen Problems, zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen eine in dieser Weise gewonnene konstruktive Lösung bei Verkleinerung von Δ einer bestimmten Grenze zustrebt, würde eine neue Form oder eine Erweiterung der Cauchy-Kowalewskischen Existenzsätze für die Integrale partieller Differentialgleichungen bedeuten. Hier soll zur vorläufigen Orientierung ein Gedankengang, den Runge[2]) bei Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen gewählt hat, auf unsere Aufgabe übertragen werden.

2. Es sei ein beiderseits begrenztes, sich nirgends überschneidendes Stück einer regulären Linie S, dann der Verlauf der Geschwindigkeit c längs derselben gegeben, ferner der Wert von H in den Punkten einer beliebigen Linie N, die in das Gebiet der zu untersuchenden Strömung hineinragt; die Koordinaten von S sowie c seien reelle analytische Funktionen der Bogenlänge s auf S, c sei überdies positiv und von null verschieden; H als Funktion des Ortes längs N endlich und mindestens einmal stetig differenzierbar.

---

1) Vgl. etwa die Ansätze bei Brauer, Turbinentheorie, Leipzig 1899, S. 102.
2) Mathem. Ann. 44, 1894, S. 437.

Sei ferner Δ eine positive Größe, welche der Bedingung genügt

$$\frac{\Delta}{c} < \varrho \text{ für } \varrho > 0;$$

dann ist es möglich, Δ so zu wählen, daß die entsprechend (40) in der positiven Normalenrichtung an S angetragenen Größen

$$z_1 = \frac{\Delta}{c}$$

eine Linie S_1 liefern, die S nicht trifft, N nur in einem Punkte schneidet und sonst alle Eigenschaften von S besitzt; dabei hängt die obere Grenze für Δ noch von dem allgemeinen Verlauf von S und dem der Funktion c ab.

Bezeichnet ΔH den Unterschied der Werte von H in den Schnittpunkten von N mit S und S_1, ferner ϱ, ϱ_1 die Krümmungsradien von S und S_1 in diesen Punkten, so setzen wir

$$\frac{g}{2} \frac{\Delta H}{\Delta} = \lambda,$$

und bilden gemäß (39) und (40)

$$z_2 = z_1 - \frac{\Delta}{c^2} \frac{\partial c}{\partial n} z_1 = z_1 - z_1^2 \left(\frac{1}{\varrho} - 2\lambda \frac{z_1}{\Delta}\right).$$

Unter der Voraussetzung

$$z_2 > 0; \quad z_2 < \varrho \text{ für } \varrho > 0$$

versuchen wir mit z_2 die Konstruktion einer neuen Stromlinie S_2; sie ist nur dann brauchbar, wenn sie weder ihre eigene Verlängerung noch eine der schon gezeichneten Linien trifft. In derselben Weise fahren wir fort, auf Grund der Gleichungen

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} z_3 &= z_2 - z_2^2 \left(\frac{1}{\varrho_1} - 2\lambda_1 \frac{z_2}{\Delta}\right) \\ z_4 &= z_3 - z_3^2 \left(\frac{1}{\varrho_2} - 2\lambda_2 \frac{z_3}{\Delta}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= z_{n-1} - z_{n-1}^2 \left(\frac{1}{\varrho_{n-2}} - 2\lambda_{n-2} \frac{z_{n-1}}{\Delta}\right) \end{aligned}$$

weitere Stromlinien zu zeichnen, wobei die Ungleichungen

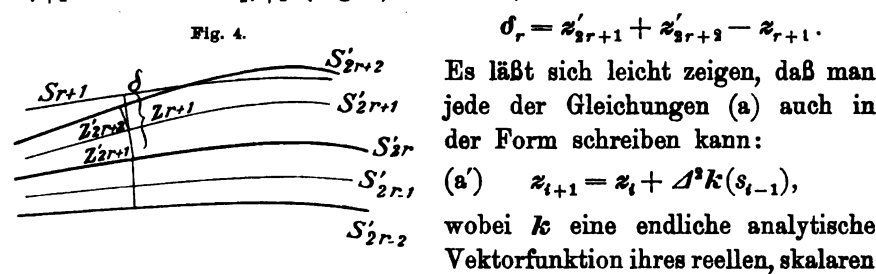
$$\text{(b)} \quad z_i > 0; \quad z_i < \varrho_{i-1} \text{ für } \varrho_i > 0$$

und die genannten gestaltlichen Forderungen immer als erfüllt angesehen werden. Die jetzt im ganzen vorliegenden $(n+1)$ Stromlinien sind durchweg reguläre Kurven und werden durch das aus Normalenstücken $z_1 z_2 \ldots z_n$ zusammengesetzte Polygon punktweise aufeinander bezogen. Ersichtlich macht es keinen Unterschied, wenn die ursprünglich gegebene, überall analytische Linie S eine *geschlossene Kurve* ist.

3. Um die *Veränderung* zu untersuchen, welche die einem bestimmten Wert von $n\Delta$ entsprechende Stromlinie bei *Verkleinerung des Intervalles Δ erfährt*, denken wir uns zuerst zwischen S und S_1 eine mit $\frac{\Delta}{2}$ konstruierte Linie S_1' eingeschaltet, benützen diese zur Konstruktion einer S_2', die an Stelle der S_1 tritt, und fahren von hier an mit dem ganzen Intervall Δ fort; hierauf ersetzen wir die neue S_2 durch eine S_4', die durch zweimalige Konstruktion mit $\frac{\Delta}{2}$ aus S_1' und S_2' unter Vermittlung von S_3' gewonnen wird, suchen wieder die dadurch hervorgerufene Verschiebung der letzten Linie auf usw. Schließlich erscheint die Gesamtänderung eines Punktes der ursprünglichen S_n als Summe der n einzelnen durch Einschaltung je einer neuen Linie hervorgerufenen Verschiebungen.

4. Es sei nun die Unterteilung bis zur Linie $S'_{2r} \equiv S_r$ fortgeschritten. Anstelle der S_{r+1}, die mit dem Intervall Δ aus $S_{r-1} \equiv S'_{2r-2}$ und S_r unmittelbar gewonnen wurde, soll jetzt eine S'_{2r+2} treten, die mit $\frac{\Delta}{2}$ unter Zwischenschaltung einer S'_{2r+1} aus S'_{2r-1} und S'_{2r} abgeleitet wird. Mit z bzw. z' bezeichnen wir die als Vektoren aufgefaßten, der Gl. (a) entsprechenden Normalenstücke, je nachdem sie mit Δ oder $\frac{\Delta}{2}$ gerechnet werden; dem z und s geben wir stets denselben Index, den S trägt, dem c den kleineren der den beiden begrenzenden S zugehörigen Indizes.

Die vektorielle Verschiebung δ_r, welche die einzelnen Punkte von S_{r+1} in die von S'_{2r+2} (Fig. 4) überführt, ist



$$\delta_r = z'_{2r+1} + z'_{2r+2} - z_{r+1}.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß man jede der Gleichungen (a) auch in der Form schreiben kann:

(a') $$z_{i+1} = z_i + \Delta^2 k(s_{i-1}),$$

wobei k eine endliche analytische Vektorfunktion ihres reellen, skalaren Argumentes bedeutet, die von ϱ_{i-1}, λ_{i-1}, c_{i-1} und (wegen der Richtungsänderung) von $\frac{\partial}{\partial s_{i-1}}\left(\frac{1}{c_{i-1}}\right)$ schließlich in einem bei kleinem Δ verschwindenden Maße auch von Δ abhängt. Somit hat man

$$z'_{2r+1} + z'_{2r+2} = z'_{2r-1} + z'_{2r} + \Delta^2[k(s'_{2r-2}) + 2k(s'_{2r-1}) + k(s'_{2r})]$$

und

$$z_{r+1} = z_r + k(s_{r-1})\Delta^2.$$

Ferner ist bei genügend kleinem $\varDelta$

$$z_r = z'_{2r} + z'_{2r-1} + \varDelta^2 h(s'_{2r-2}),$$

wenn h eine Funktion derselben Art wie k bedeutet, die wesentlich nur von $\frac{\partial}{\partial s'_{2r-2}}\left(\frac{1}{c'_{2r-2}}\right)$ abhängt; schließlich kann man die entsprechenden Bogenelemente aufeinanderfolgender Linien durch Gleichungen von der Form

$$\frac{ds_i}{ds_{i+1}} = 1 - \frac{\varDelta^2}{2}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{1}{c_i}\right)$$

aufeinander beziehen, wenn man höhere Potenzen von $\varDelta$ vernachlässigt. Auf diese Weise findet sich für die *durch einmalige Einschaltung einer Zwischenlinie herbeigeführte Verschiebung* der Ausdruck

$$\text{(c)} \qquad \delta_r = f_r(s'_{2r})\varDelta^2,$$

wo f eine Funktion bedeutet, *die — solange alle in Betracht kommenden Stromlinien reguläre Kurven sind — mit verschwindendem $\varDelta$ einer an jeder Stelle s'_{2r} bestimmten, endlichen, analytischen Funktion von s'_{2r} zustrebt.*

5. Um die *Fortpflanzung* einer einmal entstandenen Veränderung einer Stromlinie zu untersuchen, denken wir uns zwei benachbarte Linien S_t und S_{t+1} durch die ihren Punkten erteilten Verschiebungen $\delta_t = f_t(s_t)\cdot\delta$ und $\delta_{t+1} = f_{t+1}(s_{t+1})\cdot\delta$ in die neuen Linien S'_t und S'_{t+1} transformiert, wobei f eine endliche analytische Funktion, δ einen beliebig kleinen Parameterwert bedeutet. Die Verschiebung eines Punktes von S_{t+2} ist

$$\delta_{t+2} = \delta_{t+1} + (z'_{t+2} - z_{t+2}).$$

Der Klammerausdruck rechts wird dabei durch folgende Elemente bestimmt: die Änderung von $\frac{1}{\varrho}$ und λ beim Übergang von S_t zu S'_t, die Richtungsabweichung der Normalen von S'_{t+1} gegenüber der von S_{t+1} und die Größendifferenz $(z'_{t+1} - z_{t+1})$. Nun ist

$$z'_{t+1} - z_{t+1} = \delta_{t+1} - \delta_t = (f_{t+1} - f_t)\cdot\delta;$$

die Änderung von λ geht, gemäß der vorausgesetzten Stetigkeit, mit δ gegen Null; die von $\frac{1}{\varrho}$ sowie die Richtungsänderung von z läßt sich, da die f *endliche Ableitungen* besitzen, ebenfalls als Produkt von δ in einen für jedes δ endlichen Faktor darstellen, also ist schließlich — da alle z dem $\varDelta$ proportional sind —

$$z'_{t+2} - z_{t+2} = \varphi_t\varDelta\cdot\delta$$

$$\delta_{t+2} = \delta_{t+1} + \varphi_t\cdot\varDelta\cdot\delta,$$

wo φ_t eine endliche analytische Vektorfunktion von s_t oder s'_t darstellt. Bezeichnet man mit $|\delta_{t+2}|$ und $|\delta_{t+1}|$ die Größtwerte von δ_{t+2} bzw. δ_{t+1}, von denen wir voraussetzen dürfen, daß sie nicht verschwinden, ferner mit $|\varphi_t|$ den Größtwert von $\varphi_t \frac{\delta}{|\delta_{t+1}|}$, so wird

$$|\delta_{t+2}| \leqq |\delta_{t+1}|(1 + |\varphi_t|\varDelta),$$

und wenn man zu weiteren Stromlinien fortschreitet:

$$|\delta_{t+3}| \leqq |\delta_{t+2}|(1 + |\varphi_t|\varDelta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|\delta_n| \leqq |\delta_{n-1}|(1 + |\varphi_{n-2}|\varDelta).$$

Ist $|\varphi|$ der größte Wert aller $|\varphi_t|$, so folgt

$$|\delta_n| < |\delta_{t+1}|e^{|\varphi|(n-t-1)\varDelta}.$$

Für die Berechnung der $|\varphi_i|$ kommen bei jedem Schritt um eine Ordnung höhere Ableitungen der ursprünglich gegebenen Funktionen f_t und f_{t+1} in Betracht und man kann daher aus unseren Voraussetzungen nicht schließen, daß die $|\varphi_i|$ mit zunehmender Zahl der Intervalle nicht über alle Maßen wachsen; andrerseits aber kann jedes $|\varphi_t|$ durch die wirklichen Verschiebungen und deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Linien S_t und S_{t+1} ausgedrückt werden. Beschränken wir uns, wie oben, auf den Fall, daß wir es *ausschließlich mit regulären Stromlinien* zu tun haben, so müssen die Ableitungen der Verschiebungen mit den Verschiebungen stetig gegen Null gehen; wir fügen die Voraussetzung hinzu, daß für die ersten beiden Ableitungen die *Ordnung ihres Nullwerdens mindestens dieselbe ist*, wie die des Nullwerdens der maximalen Verschiebung. Dann bleiben die $|\varphi_t|$ bei beliebig zahlreichen Intervallen endliche Größen, die das Verhältnis der längs S_t größten Schwankung von $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c_i}\right)$ zu der größten Verschiebung zum Ausdruck bringen.

Setzt man jetzt für $|\delta_{t+1}|$ den Wert aus (c) ein, so kann man schreiben

$$|\delta_n^{(t)}| < |f_t|\varDelta^2 e^{|\varphi|(n-t-1)\varDelta},$$

und mit Rücksicht auf das früher Gesagte

$$\|\delta_n\| < |f| n \varDelta^2 e^{|\varphi| n \varDelta},$$

wobei $|f|$ den Größtwert aller $|f_t|$, $\|\delta_n\|$ den der Gesamtverschiebungen der Punkte von S_n bedeutet, die sich nach n-maliger Wiederholung der Einschaltung je einer neuen Zwischenlinie ergibt. Da, soweit unsere Voraussetzungen erfüllt sind, $|f|$ und $|\varphi|$ nicht unendlich werden können,

so folgt: ***Durch fortschreitende Verkleinerung von Δ bei Festhaltung von $n\Delta$ läßt sich die Verschiebung, die S_n bei nochmaliger Halbierung des Intervalles Δ erfährt, beliebig klein machen.***

6. Die Analogie unseres Problems mit dem in der Theorie *gewöhnlicher Differentialgleichungen* auftretenden kommt deutlich zum Ausdruck, wenn wir unsere Gleichungen (39), (40) in der Form schreiben:

$$\frac{dz}{d\psi} = \frac{1}{c}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{c}\right)}{d\psi} = -\frac{1}{c^2\varrho} + \frac{2\lambda}{c^3},$$

und dabei die Gesamtheit der längs der Orthogonallinien gemessenen Ordinaten z einer Stromlinie als die abhängige, ψ als die unabhängige Variable auffassen. Die Forderung, daß die Ausdrücke rechts stetig seien, ist im Gebiete regulärer Stromlinien immer erfüllt; um der weiteren sogen. Lipschitzschen Bedingung zu genügen, war die Einführung der oben ausgesprochenen Voraussetzung erforderlich: S muß die Gesamtheit regulärer Linien derart durchlaufen, daß die Richtungsänderung der Tangente und die Krümmungsänderung an irgend einem Punkte von S als Funktion der längs S größten Verschiebung angesehen, nur *endliche Differenzenquotienten* aufweist.

Es ist hier die Vermutung auszusprechen, daß diese letzte Einschränkung keine wesentliche ist, und unser Verfahren in der Umgebung der gegebenen Randlinie so weit anwendbar bleibt, als nicht eine der Größen $\frac{1}{c}$, ϱ, c Null wird oder eine Stromlinie sich selbst oder eine frühere trifft. Mit $\frac{1}{c} = 0$ oder $\varrho = 0$ und nicht zugleich verschwindendem c ist aber die Grenze eines Stetigkeitsgebietes im Sinne unserer Festsetzungen im § 1, 1 erreicht.

Setzt man ein Strombild nach dem Innern einer geschlossenen Stromlinie fort, so gelangt man schließlich zu einer Stelle, an der die Stromlinien auf Null zusammenschrumpfen; wenn hier nicht $c = 0$ wird, ist die Lösung nur dann physikalisch möglich, wenn der betreffende Punkt durch eine feste Umgrenzung ausgeschlossen wird. Ähnliches tritt ein, sobald zwei Stromlinienstücke einander berühren; man muß, wenn nicht c verschwindet, an der betreffenden Stelle eine starre Zwischenwand einführen, um die Bewegung zu verwirklichen.

Bezeichnen wir als *„stetige Strömung"* eine solche, bei der alle Stetigkeitsforderungen des § 1, 1 erfüllt sind, und überdies c in keinem Punkte des Innern Null wird, so können wir unsere Ergebnisse — allerdings in etwas weiterem Umfange als sie durch die Herleitungen unmittelbar gedeckt sind — dahin zusammenfassen: *Ist längs einer*

regulären Stromlinie S die Geschwindigkeit c als endliche, positive, von Null verschiedene analytische Funktion der Bogenlänge gegeben, ferner die Strömungsenergie H als endliche, mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion des Ortes auf einer einfachen, S durchschneidenden Linie, so ist, angrenzend an S, innerhalb des Bereiches, in dem H gegeben ist, und eventuell eingeschlossen zwischen zwei von den Enden von S ausgehenden Orthogonallinien, eine stetige Strömung bestimmt, die durch unser Verfahren mit beliebiger Genauigkeit darstellbar ist; jede Stromlinie der Lösung ist eine reguläre Kurve.

Statt des Geschwindigkeitsverlaufes hätte auch der Druckverlauf längs der Stromlinie S und der Wert von c in einem ihrer Punkte vorgeschrieben werden können. Aus den Überlegungen in § 4 und § 5 geht ferner hervor, daß in gleicher Weise wie die ebene Bewegung die *Strömung irgend einer Flüssigkeitsschichte* behandelt werden kann, sobald die Führungsflächen singularitätenfrei sind und wenigstens an jeder Stelle endliche Hauptkrümmungen besitzen.

§ 7. Empirisch gegebene Randbedingungen.

1. Es sei eine Stromlinie S *empirisch*, etwa als starre, die Flüssigkeitsströmung begrenzende Wand, ferner die Geschwindigkeit c als Funktion der Bogenlänge längs S gegeben; dabei soll es gestattet sein, die vorgeschriebenen Werte von c als Mittelwerte zu einem bestimmten kleinen Betrag Δ anzusehen, so daß man auch zwei Nachbarlinien S und S_1 als von vornherein gegeben betrachten darf. Schließlich sei, wie früher, H oder λ in ausreichendem Maße auf einer Querlinie vorgeschrieben. *Was läßt sich jetzt über die stationäre Strömung in der Nachbarschaft von S aussagen?*

Kann man die vorgeschriebenen Randbedingungen als abteilungsweise regulär auffassen, und entwickelt man (etwa für $H =$ konst.) für die einzelnen Stücke die Lösungen in der im vorigen Paragraphen vorgetragenen Weise, so werden die so erhaltenen Strombilder sich im allgemeinen nicht stetig aneinander schließen, und es wird im allgemeinen auch nicht möglich sein, sie durch analytische oder auch nur stetige Fortsetzungen ineinander überzuführen. Daraus folgern wir, da wir die Existenz einer stetigen Lösung bei nicht-analytischen Randbedingungen aus physikalischen Gründen voraussetzen müssen, daß die bisher betrachtete Lösung für ein nicht geschlossenes reguläres Randstück nicht die einzige sein kann, die den Stetigkeitsforderungen und der Differentialgleichung genügt. Es ist jene, *deren analytische Fortsetzung über die begrenzenden Orthogonallinien hinaus der analytischen Fortsetzung der Randwerte entspricht.* Die Lösung ist somit, streng

genommen, auch nur dann physikalisch realisierbar, wenn in der ganzen, durch das ins Auge gefaßte Stück schon allein bestimmten Fortsetzung nirgends Singularitäten auftreten, die mit der Natur der Stromlinien unverträglich sind.

2. Um der Beantwortung der eingangs aufgeworfenen Frage näher zu kommen, stellen wir eine Reihe von Sätzen auf, die einerseits durch verschiedene spezielle Ergebnisse der Theorie der Differentialgleichungen, andrerseits durch die allgemeinen Folgerungen, zu denen sie in der Hydromechanik führen, gestützt werden.

a) In der Umgebung einer *geschlossenen* regulären Randlinie stellt die im vorangehenden Paragraphen nachgewiesene reguläre Lösung die *einzige* Strömung dar, die der Differentialgleichung genügt und im ganzen Verlauf stetig ist.

b) Unter den bei einer *offenen* regulären Randlinie möglichen verschiedenen Lösungen für dieselbe H-Verteilung kann *jede einzelne* durch Angabe der folgenden zusätzlichen Bestimmungsstücke *ausgewählt* werden: auf zwei von den Endpunkten 1 und 2 ausgehenden, sich nicht treffenden einfachen Linien C_1 und C_2 wird die zu den Linien senkrechte Komponente c_n der Geschwindigkeit vorgeschrieben; dabei ist c_n eine im übrigen willkürliche, eindeutige, von Null verschiedene und mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion des Ortes, die in den Schnittpunkten von C und S den Wert annimmt, der sich aus der Richtung von C gegen S und dem Endwert von c an dieser Stelle von S ergibt.

c) Alle Lösungen, die im Falle b) verschiedenen Verfügungen über die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit entsprechen, *konvergieren* mit Entfernung von den C nach dem Innern des Gebietes hin und Annäherung an S in folgendem Sinne gegen ein bestimmtes Strombild, „die zu SS_1 gehörende *Eigenströmung*“: unterwirft man die Endgeschwindigkeiten einer beliebigen Variation innerhalb eines gegebenen Bereiches, so gibt es zu jedem solchen längs S einen Streifen, in dessen Innern die zugehörigen Lösungen für c sich höchstens um einen vorgeschriebenen kleinen Betrag $|\varepsilon|$ unterscheiden; der Verlauf des Streifens, der nicht von einer Stromlinie begrenzt wird, ist lediglich von dem Variationsbereiche und von $|\varepsilon|$ abhängig; seine Breite geht an den Enden 1 und 2 gegen Null und verschwindet überhaupt mit $|\varepsilon|$.

d) Ist eine Randlinie S *empirisch* gegeben, so darf sie, soweit es sich um die näherungsweise Herstellung einer Lösung handelt, *durch eine reguläre Randlinie ersetzt werden*, deren Koordinaten gleichmäßig gegen die der ersten konvergieren; oder: die einer gleichmäßig konvergenten Reihe analytischer Näherungsfunktionen als Randwerten ent-

sprechenden Strombilder konvergieren in der Umgebung von S; dabei sind die Sätze a) bis c) entsprechend zu berücksichtigen.

3. Der erste Satz stimmt, wenn die Querverteilung von H als analytisch vorausgesetzt wird, im wesentlichen mit einer naheliegenden, von Sommerfeld[1]) ausgesprochenen Vermutung überein, eine elliptische Differentialgleichung (mit analytischen Koeffizienten) habe nur *eine* Lösung, die auf irgendeinem Randstück samt ihrer Normalableitung vorgeschriebene Werte annimmt und in der Umgebung dieser Linie sich *überall* regulär verhält. Auf Grund unserer in § 5, 3 dargelegten Auffassung von dem Einfluß des nicht-analytischen Charakters von $F(\psi)$ dehnen wir diese Anschauung auch auf den vorliegenden allgemeinen Fall aus.

Die im zweiten Satze eingeführten *zusätzlichen Randbedingungen* erscheinen als Ersatz für die Angabe der, im allgemeinen nicht-analytischen, Fortsetzung der Randlinie und des Geschwindigkeitsverlaufes über deren Ende hinaus. Jeder zulässigen Verfügung über die Verteilung von c_n längs C_1 entspricht eine Verfügung über die Fortsetzung der Randwerte jenseits der Punkte SC_1 und umgkehrt. In dem weiter unten dargelegten Konstruktionsverfahren zur Herstellung der Näherungslösung erblicken wir die wesentlichste Stütze für die Richtigkeit dieser Auffassung, die unmittelbar mit der unter d) enthaltenen Bemerkung über nicht-reguläre Randwerte zusammenhängt.

Von der letzteren werden wir in dem Sinne Gebrauch machen, daß wir an jeder von den Endpunkten genügend weit entfernten Stelle von S die für die Fortsetzungskonstruktion erforderlichen beiden ersten Ableitungen der Koordinaten (Normalenrichtung und Krümmungsradius) als annähernd gegeben voraussetzen; sie sind tatsächlich mit Hilfe einer die ganze Linie *gleichmäßig* approximierenden Näherungskurve zu ermitteln. In den Ableitungen des vorangegangenen Paragraphen ist der Satz begründet, daß der Wert von c in einem Punkte innerhalb eines Gebietes durchaus regulärer Stromlinien durch die Werte, die c und die Ableitungen $\frac{d^n c}{ds^n}$ in einem benachbarten Punkte (auf einer andern Stromlinie) annehmen, darstellbar ist, wenn noch H entsprechend gegeben wird; dabei wächst die Genauigkeit mit n und mit der Annäherung des ersten Punktes an die Stromlinie. Die Übertragung auf den Fall der Nachbarschaft einer *nichtregulären* Grenzlinie erfolgt im Sinne von Satz d) in der Weise, daß an Stelle der sukzessiven Ableitungen von c der *tatsächliche Verlauf* von c längs der Linie *beider-*

1) Enzykl. II A, 7a, Nr. 9, S. 541.

seits des betrachteten Punktes, und zwar in einem mit der geforderten Genauigkeit wachsenden Ausmaß gegeben sein muß.

Der für das Folgende wichtigste Punkt unserer Aufstellungen liegt in der aus der physikalischen Anschauung geschöpften Behauptung von der Existenz der *Eigenströmungen*, die einem gegebenen Paar von Stromlinien und einer vorgeschriebenen Verteilung von H zugehören. Sie findet — namentlich in der weiter unten sich ergebenden Fassung — ein Analogon auf dem Gebiet der Elastizitätstheorie in dem bekannten Saint-Vénantschen Prinzip, das besagt, daß auf die Spannung im Innern eines langen stabförmigen Körpers die Verteilung der Oberflächenspannung über die kleinen Endflächen nur einen mit der Entfernung von den Enden schwindenden Einfluß besitzt. Zweifellos liegen vielen eingebürgerten Überlegungen der Hydromechanik, sowohl der theoretischen als der technischen Richtung, unausgesprochen Vorstellungen zugrunde, die mit dem Saint-Vénantschen Gedanken verwandt sind. Es muß hervorgehoben werden, daß hier, wo es sich um die Strömung idealer Flüssigkeiten handelt, wohl die Verteilung der c_n über die Endquerschnitte, keineswegs aber die *Verteilung der Strömungsenergie* in einem Querschnitt vernachlässigbar wird.

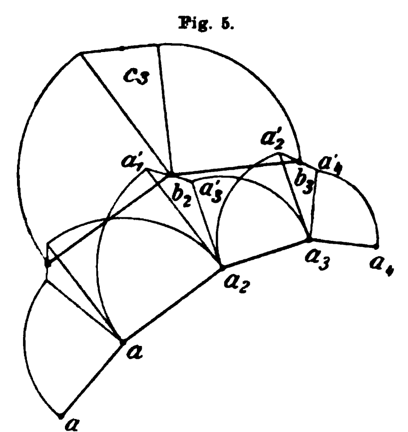
4. Im konkreten Fall gestaltet sich nun die Konstruktion der Lösung wie folgt: Auf der Stromlinie S, die als ganz beliebiger Linienzug vorausgesetzt wird, greifen wir eine Reihe von Punkten in angemessenen Abständen heraus und bestimmen in jedem eine *mittlere* Normalen richtung — sie fällt in einem regulären Punkt mit der der wirklichen Normalen zusammen — auf der wir $z_1 = \frac{\Delta}{c}$ auftragen. Die so erhaltenen Punkte können nun durch einen Polygonalzug oder eine glatte Kurve verbunden werden; in jedem Fall läßt sich, wenn man von den Enden genügend entfernt bleibt, wieder eine mittlere Richtung der Normalen festlegen. Außerdem ist durch zwei aufeinanderfolgende Normalen von S der Wert einer *mittleren* Krümmung definiert, so daß man aus (39) mit Rücksicht auf die vorgegebenen Werte von H den von $\frac{\partial c}{\partial n}$ berechnen kann; bequemer erscheint es, hier unseren Satz von der Formdifferenz (§ 5) anzuwenden, der unmittelbar den Wert für z_2 ergibt.

Bei Verfolgung dieses Weges ergibt sich ungezwungen die Tatsache, daß bei jedem neuen Schritt das Gebiet, über welches die Konstruktion sich erstreckt, im allgemeinen kleiner wird und das Verfahren sich jedenfalls in einiger Entfernung von S erschöpft. Denn man muß mit dem Ziehen der Normalen stets in einem gewissen Abstand von

den Enden der betreffenden Stromlinie aufhören, da ihre Richtung in dem Endpunkt — bei der Möglichkeit nichtanalytischer Fortsetzung — nicht definiert ist. Hat man aber längs zweier Endlinien C_1 und C_2 die Normalkomponente c_n gegeben, so kennt man damit die *Schnittpunkte der den einzelnen Intervallen Δ entsprechenden Stromlinien mit den C.* Man kann somit S_1 bis an die C_1 und C_2 heran konstruieren und hat für jede weitere Stromlinie an beiden Enden je ein letztes Element durch jene Schnittpunkte gegeben. In diesem Falle läßt sich also, soweit H bekannt ist, die Näherungslösung in dem ganzen von C_1 und C_2 seitlich begrenzten Bereich herstellen.

Ist die Bewegung durchaus *wirbelfrei*, so führt auch folgender, von jeder Rechnung freie Weg zum Ziel. Von einem der Endpunkte von S aus trägt man auf S Bogenstücke von der Länge $\frac{\Delta}{c}$ auf, wobei der Wert von c in der Mitte des betreffenden Intervalls mit dem dort vorgeschriebenen übereinstimmen mag. In jedem Eckpunkt des so entstandenen Polygons, z. B. in a_3 (Fig. 5) errichtet man die Senkrechten zu den daselbst zusammenstoßenden Seiten und trägt auf diesen die Längen der Seiten $a_3a_2' = a_3a_2$ und $a_3a_4' = a_3a_4$ auf; der Punkt b_3, der die Strecke $a_2'a_4'$ halbiert, kann nunmehr als Eckpunkt eines neuen Polygons $b_1b_2b_3\ldots$ angesehen werden, mit dem in derselben Weise verfahren wird wie mit $a_0a_1a_2\ldots$ usf.

Fig. 5.



Da die Konstruktion durchaus linear ist, kann man die Veränderung, die etwa die Punkte des Sehnenzuges $c_2c_3c_4\ldots$ infolge von Verschiebungen der $a_0a_1a_2\ldots$ erfahren, aus den letzteren in ganz derselben Weise konstruieren, in der die c_i aus den a_i abgeleitet wurden. Sind Endpunkte der Stromlinien vorgeschrieben, so können sie im Rahmen des Verfahrens leicht benützt werden. Überdies erkennt man auch die einfache Beziehung, in der die Koordinaten $(x_i'y_i')$ eines Folgepunktes zu den Koordinaten der ihn bestimmenden Punkte $(x_{i-1}, y_{i-1}; x_i, y_i; x_{i+1}, y_{i+1})$ stehen:

$$x_i' = x_i - \tfrac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})$$
$$y_i' = y_i + \tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}).$$

5. Wir gehen nunmehr dazu über, durch die Einführung weiterer Hilfshypothesen zu Aufstellungen über Randwertfragen für *allseitig geschlossene Strömungsgebiete* zu gelangen.

Durch die beiden Stromlinien S und S_1, die Querverteilung von λ oder H und die eventuelle Angabe von c_n auf den Endlinien wird jedem Werte Q (innerhalb der Grenzen des Stetigkeitsgebietes) eine Stromlinie S_n eindeutig zugeordnet. Es geht auch aus dem Früheren hervor, daß S_n sich *stetig* ändert, wenn bei Festhaltung aller übrigen Stücke S_1 stetig variiert wird. Wir gründen wieder auf die teilweise Übeinstimmung mit den Ergebnissen der analytischen Untersuchung (Picardscher Satz, Gaußsches Prinzip) sowie auf die Widerspruchslosigkeit der daraus zu ziehenden Schlüsse die Behauptung: *die Beziehung zwischen den Stromlinien S_1 und S_n, die durch keine Unstetigkeitsstellen getrennt werden, ist eine umkehrbar eindeutige.* Statt S und S_1 dürfen also S und S_n vorgeschrieben werden.

Handelt es sich um *offene* Stromlinien, so variieren sowohl S_1 als S_n derart, daß ihre auf den C liegenden Endpunkte dabei fest bleiben. Hier folgt aus unserem Satze unmittelbar ein dem Picardschen (s. § 5, 3) ähnlicher: die Bewegung ist bestimmt, wenn man *auf dem ganzen Umfang des einfach zusammenhängenden Bereiches die Komponente c_n* (sie ist längs S_1 und S_n null), ferner auf einer, jede Stromlinie einmal schneidenden Querlinie *den Wert von H* kennt; die Erfüllung der Kontinuitätsbedingungen für das ganze Gebiet, d. h.

$$\int_{(U)} c_n \, dl = 0,$$

wobei dl ein Bogenelement des Umfanges U bedeutet, ist natürlich vorausgesetzt.

Daß in unserer Formulierung eine *Einschränkung bezüglich des Verhaltens von H nicht auftritt,* kann in folgendem eine Erklärung finden. Liegt der Fall *ein*dimensionaler Bewegung vor, bei der alle Stromlinien etwa der x-Achse parallel sind, so lautet die Gl. (22)

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = F(\psi),$$

und man kennt die Bedeutung des Vorzeichens von F für das Randwertproblem dieser gewöhnlichen Differentialgleichung. Bei unserer Auffassung der Aufgabe ist die linke Seite nicht als Funktion der abhängigen Variablen ψ, sondern da H auf einer Querlinie, z. B. der y-Achse, vorgeschrieben wird, im wesentlichen als Funktion der unabhängigen Veränderlichen y gegeben. Die Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = f(y)$$

hat aber stets *eine* und *nur eine* Lösung, die für zwei Werte von y vorgeschriebene Beträge erreicht.

Bildet die Stromlinie, von der ausgegangen wird, *eine geschlossene Kurve*, so gilt dasselbe auch für S_1 und S_n, die Angabe der c_n auf den C entfällt hier, und weder S_1 noch S_n haben feste Punkte. Wird jetzt statt S_1 die letzte Stromlinie S_n vorgeschrieben, so muß noch der zugehörige Wert von Q ausdrücklich gegeben werden, was früher nicht erforderlich war, d. h. für das ringförmige, *zweifach zusammenhängende Gebiet* ist außer der Kenntnis der (am ganzen Umfang verschwindenden) Werte von c_n und der Verteilung von H noch *die Angabe einer Konstanten* Q notwendig.

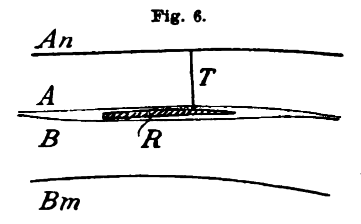
Liegt schließlich ein Paar *offener* Stromlinien vor, deren mittlerer Abstand gegenüber ihrer Länge gering ist, so verschwindet nach dem Innern hin der Einfluß der Verteilung der ein- und austretenden Wassermenge über die Endquerschnitte, wenn ihr Gesamtwert erhalten bleibt; es gibt also in einem von zwei langen Führungslinien gebildeten Streifen *eine Eigenströmung für jede Querverteilung von H und jeden Wert von Q.*

6. Zu einer andern, überaus wichtigen Form von Randbedingungen gelangen wir, indem wir *beide* benachbarten Stromlinien S und S_1 bei Festhaltung ihrer Endpunkte stetig, und zwar derart variieren lassen, *daß ihr Abstand,* also auch der Wert von c an jeder Stelle, *dauernd derselbe* bleibt. Dabei ändert sich auch die einem beliebigen Wert Q entsprechende Stromlinie S_n stetig, während sie immer durch zwei feste auf den C liegende Punkte hindurchgeht. Wir behaupten wieder: *die Zuordnung zwischen S_n und dem Linienpaar SS_1 mit der gegebenen Geschwindigkeitsverteilung ist umkehrbar eindeutig*, woraus der Satz folgt, daß an Stelle einer der beiden die Strömung begrenzenden Stromlinien S und S_n, z. B. statt S_n, die Geschwindigkeitsgröße längs dieser, ihrer Gestalt nach nicht gegebenen Linie vorgeschrieben werden darf. Dabei müssen, wenn c_n auf den Endlinien gegeben wird, gewisse leicht erkennbare Ungleichheitsbedingungen in den Endpunkten erfüllt sein. Von dem Satze ist Gebrauch zu machen, wenn durch den bekannten *Druckverlauf an der freien Oberfläche* einer Strömung (da H ohnehin bekannt ist) mittelbar der Wert von c gegeben ist.

Ein allgemeinerer als der bereits behandelte Fall des *zweifach zusammenhängenden* Gebietes erledigt sich wie folgt. Es seien zunächst die in Fig. 6 mit A und B bezeichneten Stromlinien gegeben, die zwischen sich die starre geschlossene Fläche R einschließen; man kann angrenzend an A und B die Strombilder entwerfen, wenn außer den sonst erforderlichen Größen noch die *Verhältniszahl* gegeben ist, nach der sich die zwischen A und B fließende Wassermenge auf die beiden Arme verteilt. Denkt man sich jetzt, gemäß unserem Umkehrungs-

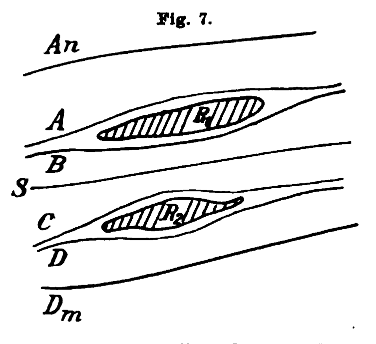
prinzip, statt A und B die Linien A_n und B_m vorgeschrieben, so erkennt man, daß zur Bestimmung der Bewegung in dem ringförmigen Bereich über eine *willkürliche Konstante*, etwa die durch den Schnitt T fließende Wassermenge, verfügt werden muß. Es ist leicht, die Betrachtung auf den Fall auszudehnen, daß zwischen *demselben* Stromlinienpaar mehrere Strömungshindernisse $R_1 R_2 \ldots$ hintereinander liegen. Aus der Konstruktion, durch welche die Lösung gefunden wird, geht auch hervor, daß der Einfluß einer Störung, wie sie ein Flächenstück R darstellt, sich verliert, wenn man in der Richtung der Stromlinien von R fortschreitet.

Fig. 6.



Liegen zwei, die Strömung ablenkende Flächenstücke R_1 und R_2 in der Strömung *nebeneinander*, so kann man zunächst von den vier Stromlinien A, B, C, D (Fig. 7) ausgehen. Es ist die Kenntnis von *zwei* Verteilungsziffern erforderlich, um die Strombilder nach den vier Seiten hin zu entwickeln. Denkt man sich statt A und D die äußeren Begrenzungslinien A_n und D_m gegeben und bestimmt die Bewegung überdies dadurch, daß man eine zwischen R_1 und R_2 gelegene Stromlinie S willkürlich vorschreibt, so werden im allgemeinen die für $A_n S$ bezw. für SD_m konstruierten Lösungen, die in S zusammenstoßen, hier verschiedene Druckverteilung aufweisen. Die wirkliche Strömung ist dadurch bestimmt, daß die Druckverteilung auf beiden Seiten *dieselbe* ist, und wir postulieren ähnlich wie oben den Satz, daß das Vorschreiben dieser Bedingung (wobei S nicht gegeben ist) der Angabe der Gestalt von S äquivalent sei, d. h. *daß zwischen S und der Verteilung der Druckdifferenzen eine umkehrbare eindeutige Beziehung herrsche.* Das Ergebnis, zu dem wir derart gelangen, ist: Zur Kennzeichnung der Strömung im n-fach zusammenhängenden Gebiet sind $(n-1)$ Verteilungsziffern erforderlich, die man passend auffassen kann als *die Durchflußmengen durch solche $(n-1)$ Querschnitte, die das Gebiet in ein einfach zusammenhängendes zerlegen.* Wie oben, ist auch hier zu schließen, daß die Eigenströmung zwischen zwei nahen und langgestreckten Grenzstromlinien unbeeinflußt bleibt, wenn in weiter Entfernung von der betrachteten Stelle Strömungshindernisse vorhanden sind.

Fig. 7.

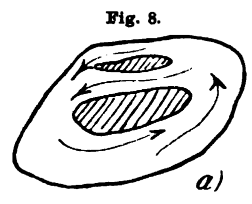


Aus der in § 2, 5 erwähnten Existenz von *Integralen mit Unstetig-*

keitsflächen im Innern schließen wir, daß *eine als Begrenzung vorgeschriebene Stromlinie auch stückweise durch die Bedingung konstanten Druckes* (oder konstanten Wertes von P) *ersetzt werden darf.* Ergibt nämlich die stetige Lösung einen negativen Wert von p an irgend einer Stelle, so entspricht nach Helmholtz der wirklich eintretenden Bewegung ein anderes Integral der Bewegungsgleichungen, nach welchem die Flüssigkeit sich in einem bestimmten Punkte *von der vorgeschriebenen Begrenzung loslöst* und eine Strecke weit an ruhender Flüssigkeit vorbei, also mit der Grenzbedingung $P =$ konst., weiterströmt.

7. Unsere Ergebnisse, die sinngemäß auf die Strömung in *beliebigen Stromschichten* bei vorgegebenen Führungsflächen übertragen werden können und die, soweit es sich um das einfach zusammenhängende ebene Gebiet handelt, wesentlich mit dem Picardschen Satz übereinstimmen, fassen wir nunmehr zusammen: *Eine ebene stationäre, in ihrem ganzen Verlauf stetige Strömung vom Typus a) oder b) (Fig. 8) ist bestimmt, wenn man außer den die Strömung begrenzenden festen Wänden und dem Druckverlauf an etwaigen freien Grenzen noch kennt: erstens die Verteilung der Strömungsenergie H auf einer alle Stromlinien einmal schneidenden Linie; zweitens $(n-1)$ Verteilungsziffern, d. h. die Durchflußmengen durch $(n-1)$ entsprechend gewählte Querschnitte,* wobei n die Zusammenhangszahl des Gebietes bedeutet; *drittens im Falle b) die Normalkomponente der Ein- und Austrittsgeschwindigkeit jedes Teilchens auf den das Gebiet abschließenden Querlinien. Alle Stromlinien im Innern sind reguläre Kurven und werden durch die in § 5, 4 ausgesprochene geometrische Eigenschaft bestimmt. Der Einfluß der im Falle b) vorgeschriebenen Verteilung von c_n über eine Endlinie, sowie der eines Strömungshindernisses verschwindet, wenn man von der betreffenden Stelle genügend weit entfernt ist. — Bedingt die stetige, den Randwerten genügende Lösung an irgend einer Stelle einen negativen Wert für p, so gibt es eine zweite Lösung, die dadurch bestimmt ist, daß anstelle eines Teiles der vorgeschriebenen Führungslinie die Bedingung konstanten Geschwindigkeitsverlaufes längs der begrenzenden Stromlinie tritt.*

Fig. 8.



Für die wirkliche *Herstellung der Lösung* bei gegebenen „zweiseitigen" Randbedingungen, wie sie jetzt betrachtet wurden, ist eine Methode sukzessiver Annäherungen durchzuführen. Nimmt man zunächst zu der gegebenen Stromlinie S eine benachbarte S_1 *willkürlich* an, konstruiert dann gesetzmäßig nach den Angaben unter 4 die an-

grenzenden S_2, $S_3 \ldots$, so gelangt man zu einer S'_n, die mit der vorgeschriebenen S_n im allgemeinen nicht übereinstimmen wird. Um eine bessere Annäherung zu erhalten, kann man die angenommenen z_1 etwa in dem Verhältnis ändern, in dem die ganze Länge einer Orthogonallinie SS'_n, die sich aus der Konstruktion ergeben hat, zu der entsprechend gemessenen Entfernung von S und S_n steht. Dabei muß aber vorausgesetzt werden, daß die erste Annahme von S_1 keine allzu unrichtige war, sondern bereits auf einer *beiläufigen Kenntnis des Strömungsverlaufes beruhte.*

Wir werden in § 14 an der Durchführunng eines in die Turbinentheorie gehörigen Beispieles die Verwendbarkeit unseres Verfahrens erweisen.

§ 8. Das allgemeine Randwertproblem; Einfluß der Zähigkeit.

1. Auf den Fall der *allgemeinen stationären Strömung* im Raum läßt sich das Resultat des vorangehenden Paragraphen durch folgende Überlegungen ausdehnen.

Den Verlauf einer Eigenströmung in einem einfach zusammenhängenden Bereich auf irgend einer Stromfläche Σ kennt man nach Angabe der zu Σ benachbarten Stromfläche Σ_1, zweier Stromlinien S und S_n auf Σ und der Querverteilung von H über den Querschnitt der S. Hat man alle Stromlinien auf Σ ermittelt, so kann man zufolge der für *jede* Stromfläche, also auch für eine Σ schneidende, gültigen Gl. (42) den Wert von c für jeden Punkt von Σ_1 berechnen, für den man H kennt. Ist nun auf einer Querlinie von Σ_1, etwa dem Schnitt von Σ_1 mit einer Fläche Φ, außer H in jedem Punkte auch die *Richtung* von c gegeben, so kann man dort, nach geeigneter Auswahl eine Punktreihe a, a_1, $a_2 \ldots$ die *Anfangselemente der Stromlinie* ziehen. Da H auf jeder solchen konstant bleibt, so sind damit zunächst für H, und wegen der eben angeführten Möglichkeit der Berechnung von c auch für dieses die Werte der ersten Ableitungen nach *zwei*, somit nach *allen* auf Σ_1 verlaufenden Richtungen bestimmt. Jetzt kann man (42) auf die Stromfläche Σ_1 anwenden und erhält die Größe der geodätischen Krümmung und damit ein *zweites Linienelement* der Stromlinien. Durch die Wahl der Punkte a, $a_1, \ldots a_n$ auf der Schnittkurve $\Sigma_1 \Phi$, durch welche Stromlinien gelegt wurden, ist auch über den Verlauf der Nachbarfläche Σ_2 entschieden: man braucht nur zu dem bekannten Werte von c und dn' an jeder Stelle aus $dQ = c\,dn' \cdot dv$ das dv zu berechnen.

Beginnt man mit dem Ziehen der Stromlinien in einem an S benachbarten Punkte a der Schnittkurve $\Sigma_1 \Phi$ und schreitet von hier bis

zu dem Punkte a_n in der Nähe von S_n fort, so wird man das nächste, durch den Krümmungsradius ϱ' bestimmte Element der Stromlinien folgerichtig nur für die durch $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ gehenden Linien konstruieren können. Denn es bedarf zur Ermittlung von ϱ' des Wertes $\frac{\partial c}{\partial n'}$, den man für den Punkt a aus den Werten von c in a und a_1 ermittelt usw. Es tritt hier die Erscheinung auf, die der beim ebenen Problem besprochenen (§ 7, 4) ähnlich ist, daß *die Zahl der fortsetzbaren Linien bei jedem Schritt, und zwar hier um eins, abnimmt.* Dagegen ist das Strombild auf Σ_1 in seinem ganzen Verlauf, soweit es dem auf Σ bekannten gegenüberliegt, herstellbar, *wenn noch eine Stromlinie S_n' auf Σ_1 gegeben ist,* die durch a_n geht und dort die vorgeschriebene Richtung besitzt.

Nun denken wir uns die vorgeschriebene Verteilung der Richtungen von c variiert und beobachten dazu die gleichzeitige *stetige* Änderung der zu S benachbarten Begrenzungslinie S' auf Σ_1. In gleicher Weise wie früher, postulieren wir die Möglichkeit, durch Wahl einer beliebigen S' umgekehrt jene Verteilung eindeutig festlegen zu können, und gelangen zu dem Ergebnis: *In der Nachbarschaft zweier Stromflächen Σ und Σ_1 ist eine Eigenströmung bestimmt, wenn noch gegeben werden: zwei Stromflächen Σ' und Σ'_n, welche die ersteren in S, S', S_n und S_n' schneiden und im übrigen so gelegen sind, wie es aus den vorstehenden Überlegungen hervorgeht; ferner der Verlauf von H auf einer jede Stromlinie der Lösung einmal schneidenden Querfläche.*

Von der Eigenströmung schreitet man zu einer vollständigen Lösung fort, indem man noch auf zwei das Gebiet in entsprechender Weise abschließenden *Querflächen* die Normalkomponente der Geschwindigkeit als gegeben voraussetzt. Führt man die Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen Σ_1 und einer als Resultat der Konstruktion erhaltenen Σ_n ein, wiederholt ferner die Betrachtungen, die in § 7 an das Auftreten von mehrfach zusammenhängenden Gebieten, von freien Oberflächen und inneren Unstetigkeitsflächen geknüpft wurden, so erkennt man, in welcher Weise die Schlußergebnisse jenes Paragraphen hierher übertragen werden dürfen. Wir fassen nur die hauptsächlichsten Punkte in den Satz zusammen: *Eine allgemeine stationäre Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist bestimmt, wenn außer den die Strömung begrenzenden festen Flächen und dem Druckverlauf an etwaigen freien Oberflächen noch bekannt sind: die Verteilung der Strömungsenergie H auf einer alle Stromlinien einmal schneidenden Querfläche, $(n-1)$ Verteilungsziffern* (wobei n die Zusammenhangszahl bedeutet), *endlich die Normalkomponente der Aus- und Eintrittsgeschwindigkeit auf Flächen, die mit den festen Wänden*

und freien Oberflächen, soweit diese selbst nicht ausreichen, das Strömungsgebiet abschließen.

2. Die Frage nach der Bestimmbarkeit der *nichtstationären* Bewegung durch Rand- bzw. Anfangswerte beantwortet für den Fall, daß es sich um eine bestimmt herausgegriffene Flüssigkeitsmasse handelt, der folgende Satz[1]): *Kennt man zu irgend einer Zeit t_0 den Wirbelvektor λ nach Größe und Richtung für jedes Flüssigkeitselement, so ist die Bewegung in einem t_0 enthaltenden Zeitintervall bestimmt, wenn noch zu jeder Zeit die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf dem ganzen Umfang des Gebietes und die erforderliche Zahl von Verteilungsziffern gegeben ist.* Denn man bemerkt zunächst, daß aus den Werten, die c und λ für $t = t_0$ haben, auch die von λ zur Zeit $(t_0 + dt)$ mit Hilfe der Wirbelsätze sich bestimmen lassen; wird dann vorausgesetzt, daß zu jeder gegebenen Verteilung von λ und gegebenem c_n an der Oberfläche *wenigstens eine* Verteilung von c, die der Differentialgleichung und den Stetigkeitsforderungen genügt, im ganzen Innern existiert, so folgt (aus dem Randwertsatz für Potentialströmungen), daß es *nicht mehr als eine geben kann.* Vermutlich wird sich der vorstehende Satz auch auf Bewegungen mit teilweiser freier Oberfläche ausdehnen lassen.

Ist eine Bewegung einmal *wirbelfrei,* so bleibt sie es auch dauernd. Die Geschwindigkeitsverteilung wird, wie in § 5, 2 gezeigt, zu jeder Zeit durch die *augenblicklichen* Randbedingungen, und zwar in derselben Weise wie die der stationären Bewegung, bestimmt; den Druck ermittelt man aus:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{grad} gH = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dc}{dt} + \operatorname{grad} P = 0;$$

er ist von den ersten Differentialquotienten der Randwerte nach t abhängig.

3. Die Bewegungsformen, die für uns hier besonderes Interesse haben, und die man als *„Strömungen"* im engeren Sinne bezeichnen könnte, sind dadurch gekennzeichnet, daß es sich um einen *dauernden* Übergang zwischen zwei weitentfernten Gebieten handelt, in denen die Oberflächenbedingungen merklich stationär sind; das Interesse beschränkt sich dann wesentlich auf das Übergangsgebiet, in dem durch die Veränderlichkeit starrer Führungsflächen der nichtstationäre Charakter der Bewegung bedingt wird.

Aus dem oben dargelegten Satz können wir die Bemerkung ableiten, daß für einen endlich begrenzten Raumteil und ein endliches

1) Vgl. etwa Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Friedel, Leipzig 1907, S. 245.



Zeitintervall die „dauernde Strömung" durch Angabe der Anfangsverteilung von λ in einem *genügend größeren* Bereich und des Verlaufes der Führungsflächen während eines *hinreichend größeren* Zeitraumes bestimmt wird.

Zur Ableitung eines für unsere Zwecke nützlicheren Randwertsatzes knüpfen wir an die Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen an. Es sei in der Ebene eine Stromlinie S, eine ihr benachbarte (zu dem vorgegebenen Wert Δ gehörige) S_1 und der Verlauf von H auf einer Querlinie N bekannt; S und S_1 sollen jetzt als mit der Zeit stetig veränderliche Linien und ebenso der Wert von H in jedem Punkt von N als stetige Funktion von t gegeben sein. Im Schnittpunkt von S und N kennt man für jeden Zeitpunkt die Werte von c, $\frac{\partial c}{\partial t}$, grad H, kann daher aus (5) den Wert von λ, und da auch ϱ bekannt ist, $\frac{\partial c}{\partial n}$ berechnen; damit hat man für jedes t einen in der Nachbarschaft von N liegenden Punkt einer Stromlinie S_2. Aus

$$\frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

bekommt man den Wert von H zunächst für jeden Punkt von S, ferner auch für einen an N benachbarten Punkt von S_1 zu jeder Zeit. Daher kann man die begonnene Konstruktion von S_2 fortsetzen, und weiter ebenso eine S_3, S_4 ... daranfügen. Über die Notwendigkeit der Angabe der Normalkomponente von c längs zweier Abschlußlinien gilt dasselbe wie bei der stationären Bewegung. Ebenso wie oben ist auch jetzt die Auffassung von der umkehrbaren Zuordnung zweier Stromlinien zu verwerten, dann die Betrachtung auf mehrfach zusammenhängende, schließlich auf räumliche Gebiete zu übertragen. Als Ergebnis dürfen wir den Satz hinstellen: *Eine dauernde Strömung ist bestimmt, wenn alle zur Bestimmung der stationären Bewegung erforderlichen Größen in ihrer Abhängigkeit von der Zeit in ausreichendem Maße gegeben sind.*

Verfolgt man eine Wirbellinie beim Übergang aus einem Gebiet *wesentlich stationärer Strömung* in ein zweites von *gleichem* Charakter, so weiß man, daß sie in jedem von beiden auf einer Fläche H = konst. verlaufen muß. Die Stromlinien, die auf den zwei entsprechenden Flächen liegen, gehören paarweise zusammen, und da die Wirbelstärke eines Teilchens erhalten bleibt, ist der Abstand dn' zweier benachbarter Linien der in Richtung von dn' genommenen Komponente von λ proportional. Betrachtet man jetzt zwei aufeinanderfolgende H-Flächen mit dem Intervall $\Delta_1 H$ in dem einen Gebiet, so entsprechen ihnen im zweiten zwei Flächen mit dem Intervall $\Delta_2 H$. Nun ist der Gradient von H dem Produkt $c\lambda_{n'}$ also auch cdn' proportional, der letztere Aus-

druck aber (zufolge der Kontinuitätsgleichung) dem Abstand der H-Flächen verkehrt proportional; es folgt also, daß notwendigerweise $\Delta_1 H = \Delta_2 H$ wird. Damit ist ein Satz bewiesen, der im Zusammenhang mit den Sätzen des § 10 bemerkenswert ist: *Findet zwischen zwei entfernten, im limes stationären Strömungsgebieten ein Übergang in Form einer dauernden Strömung statt, so ist die Gesamtänderung, welche die Strömungsenergie H eines Teilchens, etwa durch Vermittlung periodisch bewegter Führungsflächen dabei erfährt, für alle Teilchen dieselbe.*

4. Es handle sich jetzt um die *stationäre ebene Bewegung einer zähen Flüssigkeit,* für die nach § 3 (13), wie man leicht ableitet,

$$c\frac{\partial \lambda}{\partial s} = -\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\lambda \tag{50}$$

gilt, und es sei die Strömung durch eine Schar von Stromlinien mit konstantem Intervall Δ dargestellt. Wir ziehen außerdem in der Ebene die Linien $\lambda =$ konst. und bemerken, daß diese zu $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\lambda$ in derselben Beziehung stehen wie die Stromlinien zu 2λ; denn bezeichnet dw das Wegelement senkrecht zur λ-Linie, so hat $\operatorname{rot}\lambda$ die Größe $\frac{\partial \lambda}{\partial w}$ und jene Richtung der λ-Linie, die zu dem wachsenden Werte von λ so liegt, wie die x- zur y-Achse. Die vorstehende Gleichung gestatt uns nun, *zu gegebenen vier benachbarten Stromlinien $S\,S_1\,S_2\,S_3$ das angrenzende Strombild zu konstruieren.*

Zu diesem Zwecke ermitteln wir für die Punkte von S und die von S_1 die Werte von λ, was nach den Ausführungen in § 5, 4 ohne weiteres möglich ist; da derart c und $\frac{\partial \lambda}{\partial s}$ längs S bekannt sind, kann man aus der Gl. (50) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\lambda$ berechnen und damit den Anfangselementen der λ-Linien je ein zweites Element hinzufügen. Kennt man aber λ in den Punkten von S_2, so läßt sich, wie aus der eben angeführten Betrachtung in § 5 hervorgeht, eine neue Linie S_4 einzeichnen. Es folgt also die *formale Möglichkeit der Fortsetzungskonstruktion* für den Fall, daß die $S \cdots S_3$ in genügend langem Ausmaß gegeben sind. Überdies erkennt man, daß bei jedem Schritt an jedem Ende *zwei* Elemente der zu konstruierenden Stromlinien verloren gehen: eines bei Bestimmung von λ auf S und S_1, wobei die Kenntnis des Krümmungsradius der Stromlinien erforderlich ist, und ein zweites bei Berechnung von $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\lambda$, da dabei die Ableitung von λ nach s benützt werden muß. Wir schließen daher, daß zur vollständigen Bestimmung einer Lösung die Angabe der Endelemente der Stromlinien, also die Kenntnis des Geschwindigkeitsvektors längs zweier das Strömungsgebiet seitlich abgrenzender Linien notwendig wird. Unserer Auffassung von der Um-

kehrbarkeit der Zuordnung zwischen den Stromlinien innerhalb eines durchwegs regulären Gebietes entspricht dann der Satz: *Kennt man zwei begrenzende Stromlinien und längs jeder den Verlauf von c, so ist die ebene stationäre Strömung der zähen Flüssigkeit in dem einfach zusammenhängenden Gebiet bestimmt, wenn noch c auf zwei Endlinien bekannt ist; der Einfluß der letzteren Angabe verschwindet nach dem Innern des betrachteten Gebietes hin.*

In einem ringförmig geschlossenen Bereich ist eine stationäre Strömung im allgemeinen nicht möglich, da der Druck infolge der Dissipation der Energie bei jedesmaligem Umlauf um einen positiven Betrag abnehmen müßte. Auf den Fall des mehrfach zsammenhängenden Gebietes vom Typus b) Fig. 8 ist jedoch unser Satz, und zwar *ohne jeden Zusatz* anwendbar. Denn da wir die Kenntnis des *Geschwindigkeits*wertes auf der Begrenzung voraussetzen, ergibt sich bei Übertragung der in § 7, 6 angestellten Untersuchung hier *nicht* die Notwendigkeit der Angabe einer besonderen Verteilungszahl. Wir gelangen zu dem auch auf räumliche Strömung auszudehnenden Ergebnis, daß die Bewegung der zähen Flüssigkeit durch die begrenzenden Wände und den Wert von c auf dem ganzen Umfang *vollkommen* bestimmt wird; *die Verteilung der Wirbelstärke oder der Strömungsenergie über einen Querschnitt, dann die Verteilung der Wassermenge auf die verschiedenenen Arme der Strömung sind nicht mehr verfügbar.*

Auf den Fall, in dem c längs der vorgeschriebenen Begrenzung verschwindet, ist die vorstehende Überlegung nicht unmittelbar anwendbar; allein es ist plausibel, daß anstelle des Geschwindigkeitsverlaufes im allgemeinen eine Beziehung zwischen der Randgeschwindigkeit und der durch die Ableitungen der Geschwindigkeit bestimmten Tangentialspannung am Rande gegeben sein darf. Ähnlich wie früher wird es auch zulässig sein, statt der einen begrenzenden Stromlinie den Druckverlauf längs derselben vorzuschreiben. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen spezieller Untersuchungen, die zur Auffindung partikulärer Lösungen geführt haben, steht unsere Schlußfolgerung: *Die stationäre Strömung der zähen Flüssigkeit wird bestimmt durch die begrenzenden Wände, bzw. den Druckverlauf an freien Oberflächen, die Reibungsbedingung an den Grenzflächen und event. die Verteilung der Aus- und Eintrittsgeschwindigkeiten für das inbetracht gezogene Gebiet: die Existenz mehrerer diskreter Lösungen bei denselben Randbedingungen ist jedoch nicht ausgeschlossen.*[1]) *Handelt es sich um eine nicht-stationäre, „dauernde" Strömung,*

1) Unter der Voraussetzung, daß die Beschleunigungsgrößen in den Gleichungen vernachlässigt werden dürfen, hat Helmholtz die Eindeutigkeit bewiesen. Wiss. Abh. Bd. 1, S. 223.



so sind alle genannten Werte in ihrer Abhängigkeit von der Zeit vorzuschreiben; der Einfluß der Verteilung der Endgeschwindigkeiten und der eines Strömungshindernisses verliert sich im allgemeinen bei genügender Entfernung von der betreffenden Stelle in Richtung der Stromlinien.

Daß jetzt — anders als bei idealen Flüssigkeiten — eine Annahme über die Querverteilung der Strömungsenergie nicht mehr möglich ist, erklärt sich daraus, daß infolge der Wirkung der Zähigkeit die einmal entstandenen Wirbel nicht erhalten bleiben, sondern überall durch die Vorgänge an den Rändern neue Wirbel hervorgerufen und dem Flüssigkeitsinnern aufgeprägt werden. Sind die Reibungsverhältnisse am Rande im ganzen Strömungsverlauf *konstant*, wie etwa bei der Bewegung im geraden zylindrischen Rohr, so bleibt bei stationärer Strömung die Wirbelstärke eines Teilchens auch unverändert oder doch wenigstens periodisch, die Verteilung der Wirbel über den Querschnitt ist aber eine *durch die Reibungswirkung von vornherein völlig bestimmte.*

5. Vom Standpunkt der Mechanik aus ist es eine natürliche Forderung, die an die Bewegungsgleichungen gestellt werden muß, daß sie jede mögliche Bewegung aus der Kenntnis der *frei verfügbaren* äußeren Bedingungen, unter denen sie eintritt, zu bestimmen gestatten. Aus unseren Betrachtungen in diesem Abschnitt geht nun hervor, daß die Eulerschen Gleichungen oder die aus ihnen abgeleiteten Helmholtzschen dieser Forderung nicht genügen da zur „Individualisierung“ einer Lösung die Kenntnis der H-Verteilung, über die in Wirklichkeit nicht verfügt werden kann, erforderlich ist, d. h. *die Theorie idealer Flüssigkeiten reicht prinzipiell zur Darstellung der hydromechanischen Erscheinungen nicht aus.* Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie etwa in der Mechanik starrer Systeme dort, wo es sich um die Ermittlung von sog. statisch unbestimmbaren Reaktionen handelt.

In § 3 haben wir erwähnt, daß eine Verwertung der Stokesschen Gleichungen zur Darstellung der Wasserströmung auch nur für die einfachsten der technisch in Frage kommenden Fälle bisher nicht gelungen ist. Es ist auch kaum anzunehmen, daß eine weitere Verfolgung des in diesem Paragraphen angedeuteten Integrationsverfahrens, etwa in der Art wie wir es für den Fall idealer Flüssigkeit im Auge haben, zu einem Erfolge führen wird. Man müßte dabei jedenfalls von einer Annahme über die Reibungsverhältnisse am Rande ausgehen, von der es mindestens unsicher ist, ob sie die Wirklichkeit richtig darstellt.

Unter diesen Umständen sehen wir uns veranlaßt, eine entscheidende *Hilfshypothese* einzuführen, deren Folgerungen zunächst an der Erfahrung zu prüfen sind, und die es ermöglichen soll, eine annähernde Darstellung des Geschwindigkeitsverlaufes in den für uns inbetracht kommenden

Fällen zu gewinnen. Die Handhabe dazu bieten uns die über das Randwertproblem bei idealen Flüssigkeiten abgeleiteten Sätze.

Mit Reynolds, Boussinesq u. a. nehmen wir an, daß jede von uns zu behandelnde Bewegung, die unter dem Einfluß fester Führungen stattfindet, eine *turbulente* ist, d. h. als Übereinanderlagerung einer langsam veränderlichen Geschwindigkeitsverteilung und einer Verteilung rascher und kleiner Pulsationen aufzufassen ist (§ 3, 7). Daran knüpfen wir die Behauptung, *daß die stabilen Mittelwerte der Geschwindigkeit sich näherungsweise als Integrale der Helmholtzschen Gleichungen (§ 2, Gl. (6):*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \operatorname{rot} c \wedge \lambda\,, \quad \operatorname{div} c = 0$$

darstellen lassen, sobald man eine geeignete, in jedem Falle besonders festzusetzende Annahme über den Verlauf der Funktion H in einem Querschnitt und eventuell auch über die Verteilungsziffern trifft. Die Werte für den Druck sind jedoch nicht wie früher aus den Eulerschen Gleichungen zu entnehmen, sondern erst aus *besonderen experimentellen Daten* zu gewinnen; dies letztere kommt darauf hinaus, daß man sich die fingierte ideale Flüssigkeit unter dem Einfluß von fingierten Kräften denkt, die ein von vornherein nicht bekanntes Potential besitzen.

Im Falle einer rein zylindrischen Strömung leistet unsere Theorie ebensoviel wie die Boussinesqsche. Sie stellt die Geschwindigkeitsverteilung richtig dar, wenn die Verfügung über H auf Grund der Beobachtung eben dieser Geschwindigkeitsverteilung getroffen wird.

Handelt es sich um die Strömung etwa in dem bogenförmigen Übergangsstück zwischen zwei geraden Rohrsträngen, so schöpfen wir die erforderliche Annahme über den Verlauf von H aus dem experimentell ermittelten Gesetz, nach dem sich die Geschwindigkeiten und die Drücke über den Querschnitt der zylindrischen Bewegung verteilen. Dabei hätten wir allerdings noch die Verfügung über das erwähnte „fingierte" Potential frei, doch entspricht es der ganzen Sachlage, dies *in jedem Querschnitt als wesentlich konstant* vorauszusetzen. Die Genauigkeit der Betrachtung ist dadurch beschränkt, daß man im allgemeinen zu verschiedenen Ergebnissen gelangen kann, je nachdem man das dem Krümmer vorangehende oder ihm folgende Rohrstück zum Ausgangspunkte wählt. Bedenkt man aber, daß die beobachteten Geschwindigkeitsgrößen einer zylindrischen Strömung im größten Teil des Querschnittes nur wenig von ihrem Durschnittswerte abweichen und erst in unmittelbarer Nähe des Randes stark abfallen, so folgt aus unserer Hypothese, daß man die gesuchten Geschwindigkeitsmittelwerte in dem Bogenstück als *in erster Annäherung wirbelfrei verteilt* ansehen darf, wenn man von den

Vorgängen dicht am Rande absieht. Prandtl[1]), der die Verhältnisse in den Randschichten auf Grund der Stokesschen Gleichungen näher verfolgt, nimmt ebenfalls an, daß die Bewegung in einiger Entfernung von den Rändern nahezu wirbelfrei ist, oder doch auf Grund der Helmholtzschen Sätze behandelt werden darf.

Eine Stütze für unsere Auffassung, wonach die Geschwindigkeitsmittel der turbulenten Bewegung näherungsweise den Gleichungen für ideale Flüssigkeit genügen, erblicken wir auch in der schon von Helmholtz bemerkten[2]) *qualitativen Übereinstimmung seiner Theorie diskontinuierlicher Flüssigkeitsbewegung mit wirklich beobachtbaren Erscheinungen.* Das Loslösen der Strömung von der Wand und das Entstehen eines „toten Raumes", zu denen jene Theorie führt, lassen sich gegebenenfalls nachweisen: freilich ist einerseits das Wasser im toten Raum nicht ruhend, sondern heftig an Ort bewegt, wobei es an der Trennungsfläche der vorbeiströmenden Flüssigkeit unausgesetzt Energie entzieht; anderseits scheinen auch die Druckbedingungen für den Eintritt der Erscheinung, wenigstens quantitativ, von den Helmholtzschen verschieden.[3])

Auf die experimentellen Daten über den *Druckverlauf* bei Strömungen zäher Flüssigkeiten kommen wir in § 10 zurück.

III. Abschnitt. Integralsätze über Druck und Arbeitsleistung des Wassers.

§ 9. Druck des Wassers auf starre Führungsflächen.

1. Es sei s (Fig. 9) der Schnitt durch eine starre Führungsfläche F, an der Wasser in der angedeuteten Weise vorbeiströmt. Um die Kraft $\mathfrak{K}$ zu berechnen, *die das Wasser auf den zwischen a und b liegenden Teil von F augenblicklich ausübt*, ergänzen wir die gegebene Begrenzungsfläche, etwa durch Hinzufügung von O derart, daß ein *allseits geschlossener* Raumteil V entsteht. Wendet man auf jedes Volumelement dV die Newtonsche Aussage an und beachtet, daß bei Summierung der Kräfte bzw. ihrer Momente die von der innern Wechselwirkung herrührenden herausfallen, so erhält man

Fig. 9.

1) Verhandl. d. 3. intern. Mathem. Kongresses in Heidelberg. Leipzig 1905, S. 489. Vgl. auch Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Dissertation Göttingen 1907.

2) Monatsber. d. königl. Akademie. Berlin 1868, S. 221.

3) Vgl. die angef. Arbeiten von Prandtl und Blasius.

für die x-Komponente eines beliebig gelegenen cartesischen Koordinatensystems

$$K_x = G_x + \int_{(O)} p_x \, do - \int_{(V)} \mu w_x \, dV \tag{51}$$

$$M_x = M_x^{(G)} + \int_{(O)} (y p_z - z p_y) \, do - \int_{(V)} \mu (y w_z - z w_y) \, dV. \tag{52}$$

G_x bezeichnet die x-Komponente des in V eingeschlossenen Gewichtes, $p_x \ldots$ die der äußeren auf die Flächeneinheit von O wirkenden Kraft, $x \ldots$ die Koordinate eines variablen Punktes, w die Beschleunigung. *Irgend eine Einschränkung über die Natur der Flüssigkeit, ihre Zähigkeitseigenschaften usw. ist hier nicht gemacht worden und wird auch im folgenden nicht notwendig werden.* Ferner ist die Wahl von O noch ganz willkürlich, wenn man sie auch vorteilhaft so treffen wird, daß p auf O bekannt ist, oder vermöge seiner Richtung aus der Gleichung herausfällt.

2. Von Interesse ist die *Umformung der kinematischen Glieder* in den Ausdrücken für K_x und M_x, die wir zunächst unter der Voraussetzung vornehmen, daß das ganze Volumen V von einer Flüssigkeitsmenge mit stetiger Geschwindigkeitsverteilung voll ausgefüllt wird. Bezeichnet v die Geschwindigkeit eines Teilchens relativ gegen die bewegt gedachte Fläche F, $\frac{\partial'}{\partial t}$ die Differentiation bezogen auf ein im *absoluten* Raum ruhendes Achsensystem, aber bei Festhaltung eines Punktes im *relativen* Raum, so ist

$$w_x = \frac{\partial' c_x}{\partial t} + v \frac{\partial c_x}{\partial s'} = b_x + \frac{\partial' v_x}{\partial t} + v \frac{\partial c_x}{\partial s'}; \tag{53}$$

b bedeutet die Führungsbeschleunigung, d. i. die Beschleunigung eines Punktes des mit F verbundenen starren Systemes; von den beiden anderen Gliedern rechts enthält jedes eine Hälfte der Coriolis-Beschleunigung. Über die in V liegende Masse integriert gibt b_x die mit μV multiplizierte Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$\int_{(V)} \mu b_x \, dV = \mu V b_x^*; \tag{54}$$

das letzte Glied in (53) führt im Hinblick auf die Kontinuitätsgleichung $v df' = dq'$ zu einem Oberflächenintegral:

$$\int_{(V)} \mu v \frac{\partial c_x}{\partial s'} dV = \int_{(V)} \mu v df' \frac{\partial c_x}{\partial s'} ds' = \mu \int_{(Q')} dq' (c_x^{(2)} - c_x^{(1)}) \equiv - R_x, \tag{55}$$

wobei unter $c^{(2)}$ und $c^{(1)}$ die absolute Geschwindigkeit im Austritt bzw. Eintritt eines jeden relativen Stromfadens zu verstehen ist.

Bildet man, den zu (53) analogen beiden Komponentengleichungen entsprechend, *die Momente der einzelnen Beschleunigungsglieder*, so gibt das erste, über die Wassermasse integriert:

$$\int\limits_{(V)} \mu(y b_z - z b_y) dV = \frac{dJ_x}{dt}, \tag{56}$$

einen von der Wasserbewegung unabhängigen Bestandteil: die zeitliche Ableitung des Impulsvektors, der der Masse in V zukäme, wenn sie mit F starr verbunden wäre, also im Falle der Rotation um eine freie Achse, das Produkt aus Trägheitsmoment des Wassers und Winkelbeschleunigung des Bezugssystems. Im zweiten Gliede mit dem Moment

$$y \frac{\partial' v_z}{\partial t} - z \frac{\partial' v_y}{\partial t},$$

und im dritten:

$$v y \frac{\partial c_z}{\partial s'} - v z \frac{\partial c_y}{\partial s'},$$

bringen wir die Koordinaten y, z unter das Differentiationszeichen und haben zu

$$\frac{\partial'}{\partial t}(y v_z) - \frac{\partial'}{\partial t}(z v_y)$$

den Betrag

$$- v_z \frac{\partial' y}{\partial t} + v_y \frac{\partial' z}{\partial t}$$

hinzuzufügen, ebenso zu

$$v \frac{\partial}{\partial s'}(y c_z) - v \frac{\partial}{\partial s'}(z c_y)$$

den Ausdruck

$$- v c_z \frac{\partial y}{\partial s'} + v c_y \frac{\partial z}{\partial s'}.$$

Die beiden Korrekturglieder heben sich auf, und man erhält für die x-Komponente des durch die Relativbewegung des Wassers bedingten Momentes den Betrag:

$$- \mu \int \frac{\partial'(y v_z - z v_y)}{\partial t} dV - \mu \int v \frac{\partial(y c_z - z c_y)}{\partial s'} dV,$$

wobei das zweite Volumintegral analog dem früheren in das Oberflächenintegral

$$- \mu \int\limits_{(Q)} dq'(y c_z - z c_y)_{(1)}^{(2)} = M_x^{(R)} \tag{57}$$

verwandelt werden kann.

Führen wir für die Resultierende der Oberflächenkräfte längs O die Abkürzung P ein, so wird schließlich

$$(58)\quad K_x = G_x + P_x + R_x - \frac{G}{g} b_x^* - \mu \int \frac{\partial' v_x}{\partial t} dV = G_x + P_x + R_x - \mu \int \frac{\partial' c_x}{\partial t} dV,$$

$$(59)\quad M_x = M_x^{(G)} + M_x^{(P)} + M_x^{(R)} - \frac{dJ_x}{dt} - \mu \int \frac{\partial'(yv_z - zv_y)}{\partial t} dV$$

$$= M_x^{(G)} + M_x^{(P)} + M_x^{(R)} - \mu \int \frac{\partial'(yc_z - zc_y)}{\partial t} dV,$$

wobei die „*Reaktion*" R und ihr Moment $M^{(R)}$ durch (55) und (57) definiert sind.

3. Das vorstehende Resultat kann auch aufrecht erhalten werden, wenn das von O und F begrenzte Volumen *nicht vollständig von Wasser erfüllt wird,* und in seinem Innern Flächen O' enthält, in deren Punkten die Ableitungen $\frac{\partial' c_x}{\partial t}$ usw. nicht überall definiert sind. Der richtige Wert der Volumintegrale in (58) und (59), soweit es sich um die *Wassermasse* handelt, ist in solchen Flächen immer der, zu dem man bei stetiger Ausdehnung der Integrationsgrenzen bis O' heran gelangt (vgl. § 1,3). Andererseits müssen die nach dem Greenschen Satz gebildeten Oberflächenintegrale R_x bzw. $M_x^{(R)}$ außer über O jetzt auch über O' erstreckt werden.

Man kann nun das durch letzteren Umstand in (58) entstehende Zusatzglied, nämlich

$$-\mu \int_{(O')} c_x dq' = -\mu \int_{(O')} c_x v_n do,$$

wobei v_n die zu do senkrechte Geschwindigkeitskomponente, jetzt positiv an der Austrittsstelle, negativ an der Eintrittsstelle eines Wasserteilchens zu rechnen ist, auch schreiben:

$$-\mu \int_{(O')} c_x \frac{dv \cdot do}{dt} = -\mu \int_{(O')} c_x \frac{dV}{dt},$$

wenn dv das Wegelement bezeichnet, das ein Punkt von O' in der Zeit dt, senkrecht zu O', zurücklegt. Der letzte Ausdruck zeigt, daß das Zusatzglied *in das Volumintegral eingerechnet werden kann,* wenn man diesem an den Stellen, wo μc plötzlich auf Null sinkt, (oder vom Nullwert plötzlich ansteigt) die entsprechende Deutung gibt. Enthält V außer Wasser nur atmosphärische Luft, deren Masse wir vernachlässigen dürfen, und ruhende feste Körper, so ist damit der kinematische Bestandteil der Gleichungen erledigt; andernfalls hat man noch die negativ genommene Massenbeschleunigung der eingeschlossenen Teile

hinzuzufügen. Sieht man von letzterem ab, so können somit (58) und (59) allgemein als gültig angesehen werden, wenn man $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{M}^{(R)}$ lediglich *auf der äußeren Begrenzung O rechnet* und in den Volumintegralen *die Sprünge von μc an den nichtstationären inneren Grenzflächen entsprechend berücksichtigt.*

Bei relativ-stationären Werten von c verschwinden die Volumintegrale immer, und es kann von nicht-stationären Grenzen im Innern keine Rede sein. Ist aber die absolute Geschwindigkeit c oder das Produkt μc eine *periodische* Funktion der Zeit an jeder Stelle des mit F bewegten Systems, und bildet man die über eine volle Periode erstreckten, zeitlichen Mittelwerte der Glieder von (58) und (59), *so fallen die Volumintegrale allgemein nur bei ihrer jetzigen Definition aus der Betrachtung heraus.*

Wird ein Teil von O selbst durch eine Flüssigkeitsgrenze, also eine freie Oberfläche oder eine starre Führung gebildet, so wird man konsequenterweise auch hier die zusätzlichen Werte in den Volumintegralen beachten, die Größen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{M}^{(R)}$ aber lediglich auf die *beiderseits* von Wasser berührten Teile von O beziehen.

Handelt es sich bespielsweise um die mittlere Größe des Druckmomentes, das das in Fig. 12 dargestellte Wasserrad erfährt, so genügt es, da während des stationären Betriebszustandes das Geschwindigkeitsmoment in jedem Punkte des Rades eine periodische Funktion der Zeit ist, die Geschwindigkeitswerte auf der zylindrischen Umgrenzung der Wasserzellen zu kennen.

4. Geht man unmittelbar von der Betrachtung der *absoluten* Stromwege aus, so hat man wegen

$$w_x = \frac{\partial c_x}{\partial t} + c\,\frac{\partial c_x}{\partial s}$$

für das kinematische Glied in (58) den Ausdruck

$$-\mu\int\limits_{(Q)} dq\,(c_x^{(2)} - c_x^{(1)}) - \mu\int\limits_{(V)} \frac{\partial c_x}{\partial t}\,dV$$

und analog in (59).

Aus der Beziehung $dq = dq' + u_n do$ mit $c = v + u$ folgt die Übereinstimmung mit dem Früheren. Wieder sind allgemein die Volumintegrale nicht als die Grenzwerte zu deuten, die sich bei allmählicher Ausdehnung der Integrationsgrenzen bis an etwaige Unstetigkeitsstellen ergeben; sondern es sind die Sprünge, die μc an den Punkten einzelner Flächen erleidet, in Rechnung zu stellen; die Oberflächenintegrale sind lediglich auf vollständig im Wasser gelegene Teile von O zu erstrecken.

5. In den Darstellungen der technischen Literatur ist es üblich, den kinematischen Bestandteil des auf ein Gefäß ausgeübten Druckes dem Einfluß der *„Reaktion“* oder *„Aktion“* des Wassers bei seinem Aus- und Eintritt zuzuschreiben; dafür setzt man bald den von uns mit $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{M}^{(R)}$ bezeichneten Ausdruck, bald den auf die absolute Wassermenge dq bezogenen. Aus unseren Gleichungen geht hervor, daß $\boldsymbol{R}$ (bzw. $\boldsymbol{M}^{(R)}$) dann und nur dann den von der Bewegung des Wassers herrührenden Druckanteil vollständig darstellt, *wenn die betreffende Komponente der absoluten Geschwindigkeit (bzw. ihres Momentes) in jedem Punkte des bewegten Systems dauernd gleich bleibt;* gilt dies zwar nicht für die *absolute*, wohl aber für die *relative* Geschwindigkeit (wobei die Veränderung mit der Zeit immer an einem absolut ruhenden Achsensystem zu messen ist), *so hat man noch die Ausdrücke* $\frac{G}{g} b_x^* \left(\text{bzw. } \frac{dJ_x}{dt}\right)$ *hinzuzufügen.* Sind die betreffenden Größen nicht stationär aber *periodisch*, so bleibt die Anschauung noch richtig, wenn man die *über eine volle Periode erstreckten Mittelwerte* des Druckes rechnet. Mit Rücksicht auf die kleinen Pulsationen der Turbulenz hat man es auch bei scheinbar stationärem Zustand nur mit solchen Mittelwerten zu tun.

Bei *relativ-stationärer* Bewegung (§ 2, 6) verschwindet in

$$\frac{\partial' v_x}{\partial t} = \frac{d v_x}{\partial t} + (\omega_y v_z - \omega_z v_y)$$

nur der *erste Teil* der rechten Seite, der zweite gibt nach Umwandlung in ein Oberflächenintegral den Betrag

$$\omega_y \int dq'(z_2 - z_1) - \omega_z \int dq'(y_2 - y_1) = \int dq'(u_x^{(2)} - u_x^{(1)}),$$

d. h. es ist in den Ausdruck für R_x statt der absoluten Geschwindigkeit c_x die Summe aus dieser und der Führungsgeschwindigkeit einzusetzen; das analoge Glied der Momentengleichung gestattet eine solche Umformung nicht. Das Korrekturglied verschwindet, wenn es sich um *die zur Momentanachse parallele Komponente von* $\boldsymbol{K}$ *oder von* $\boldsymbol{M}$ *handelt.*

Man wird in die Gl. (58) und (59) dann mit Vorteil die oben aus der Betrachtung der *absoluten* Stromlinien gewonnenen Ausdrücke einführen, wenn die Strömung im *absoluten* Raum stationär oder periodisch ist. In diesen Fällen läßt sich also die Anschauung von der „Reaktionswirkung“ aufrechterhalten, *sobald man in* $\boldsymbol{R}$ *und* $\boldsymbol{M}^{(R)}$ *die absolute Wassermenge* dq *an die Stelle der relativen* dq' *gesetzt hat.*

In der Turbinentheorie handelt es sich in der Regel um die Bestimmung des auf die *Drehachse des Rades bezogenen Druckmomentes.*

Mit den Bezeichnungen des § 4 hat man für den kinematischen Anteil dieses Momentes zu setzen:

$$(60)\qquad -\mu\int (c_u r)_{(1)}^{(2)}\, dq - \mu\int \frac{\partial'(c_u r)}{\partial t}\, dV.$$

Dieser Ausdruck ist auch ohne weiteres anzuwenden, wenn eine Bewegung in symmetrischen Schichten oder eine freie symmetrische Strömung vorliegt.

Die Berechnung des *axialen*, auf ein Kreiselrad ausgeübten Druckes erfolgt ohne Schwierigkeit, sobald die Bewegung des mit dem Rad in Berührung stehenden Wassers bekannt ist; in der Regel sieht man sich gezwungen, über einen Teil dieser Bewegung eine willkürliche Annahme zugrunde zu legen.[1])

§ 10. Die Strömungsenergie.

1. Die *sekundliche Arbeit*, die eine beliebig herausgeschnittene Wassermasse vom Volumen *V an ihrer Oberfläche abgibt*, hat den Wert

$$L = \int_{(O)} c p_s\, do,$$

wenn p_s die in die Richtung der Geschwindigkeit c fallende Komponente des Oberflächendruckes bedeutet, und das Integral über die ganze geschlossene Begrenzung von V zu erstrecken ist. Eine Zweideutigkeit entsteht nur dann, wenn die Oberfläche eine Unstetigkeitsfläche für c ist; dann ist der Wert von c, der sich nach dem *Innern* stetig fortsetzt, für die *aufgewendete*, der andere für die *aufgenommene* Arbeit zu setzen. Diesen Fall lassen wir vorläufig außer Acht.

Der Ausdruck für L läßt sich nach dem Greenschen Satz in ein Volumintegral verwandeln, wenn V keine Unstetigkeitsstelle von c oder p in sich schließt. Wir bilden dL für ein Element $dx\, dy\, dz$:

$$-\,dy\,dz\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x c_x) + \frac{\partial}{\partial x}(c_y \tau_z) + \frac{\partial}{\partial x}(c_z \tau_y)\right] dx$$

$$-\,dz\,dx\left[\frac{\partial}{\partial y}(c_y \sigma_y) + \cdots\right] dy - \cdots$$

und integrieren über das ganze Volumen:

$$(61)\quad L = -\int_{(V)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(c_x\sigma_x + c_y\tau_z + c_z\tau_y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y\sigma_y + \cdots) + \cdots\right] dV.$$

---

1) Vgl. Kobes, Studien über den Druck auf den Spurzapfen, Wien 1907.

Stellt man diesem Betrag die sekundliche Abnahme A an potentieller und kinetischer Energie gegenüber:

$$(62) \qquad A = -\int\limits_{(V)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu c^2}{2}\right) dV - \int\limits_{(V)} c \frac{\partial}{\partial s}\left(\mu \frac{c^2}{2} + \gamma h\right) dV,$$

so erhält man den Energieverlust W pro Zeit- und Volumeinheit an irgend einer Stelle:

$$W \equiv \frac{d(A-L)}{dt} = -\mu c\left(\frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial s}\right) + c\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x}(c_x\sigma_x + c_y\tau_z + c_z\tau_y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y\sigma_y + \cdots) + \frac{\partial}{\partial z}(\cdots).$$

Trennt man in dem letsten Teil dieses Ausdruckes den von der Zähigkeit des Wassers herrührenden Teil der Spannung von dem übrigen ab, indem man mit (14) setzt:

$$\sigma_x = -p + \sigma_x', \cdots$$

so fällt zufolge der Kontinuitätsgleichung und der Identität

$$c\frac{\partial}{\partial s} = c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}$$

der Druck p heraus, und es bleibt

$$(63') \quad W = -\mu c\left(\frac{\partial c}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(c_x\sigma_x' + c_y\tau_z + c_z\tau_y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y\sigma_y'\cdots) + \frac{\partial}{\partial z}(\cdots).$$

Führt man die Differentiation der Produkte durch, beachtet den Ausdruck für T in (15) und die Bewegungsgleichung (16) der ds-Richtung so folgt:

$$(63) \quad W = \sigma_x'\frac{\partial c_x}{\partial x} + \sigma_y'\frac{\partial c_y}{\partial y} + \sigma_z'\frac{\partial c_z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z}\right) + \tau_y\left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y}\right)$$

und der ganze Verlust innerhalb V:

$$U = \int\limits_{(V)} W\, dV.$$

Dabei ist noch keinerlei Hypothese über den Zusammenhang der Spannungsdyade mit der der Deformationsgeschwindigkeit benützt worden. Legt man die Naviersche *Annahme* der linearen Abhängigkeit zugrunde, so erhält man den bekannten Ausdruck für die Dissipation der Energie in einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$(65) \quad W = \nu'\left[2\left(\frac{\partial c_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial c_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_z}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x}\right)^2\right].$$

Nimmt man an, daß die Flüssigkeit längs ihrer Begrenzung an einem benachbarten Körper *gleitet*, so tritt noch ein Verlust an der Oberfläche hinzu, der — wie aus dem oben Gesagten hervorgeht — durch die Werte des Geschwindigkeitssprunges und die der Oberflächenspannung ausdrückbar ist, also an freien Oberflächen verschwindet (vgl. § 3).

2. Der *Zusammenhang zwischen dem Energieverlust U und der Änderung, welche die Strömungsenergie H erfährt*, ergibt sich, indem man zunächst in L den von den äußeren Zähigkeitsspannungen *allein* herrührenden Teil L' heraushebt, also setzt

$$L' = L + \int_{(O)} p c_n do = L - \int_{(V)} c \frac{\partial \overline{p}}{\partial s} dV = - \int_{(V)} \Big[\frac{\partial}{\partial x}(c_x \sigma_x' + c_y \tau_z + c_z \tau_y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y \sigma_y' + \cdots) + \frac{\partial}{\partial z}(\cdots) \Big] dV,$$

wobei wieder Stetigkeit von c im ganzen betrachteten Bereich vorausgesetzt ist. Es wird daher (63'), (64)

$$\text{(66)} \qquad \begin{aligned} U &= -\mu \int_{(V)} c \left(\frac{\partial c}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} \right) dV - L' \\ &= -\mu \int_{(V)} c \frac{\partial c}{\partial t} dV + \gamma \int_{(Q)} (H_1 - H_2)\, dq - L'. \end{aligned}$$

Das erste Integral rechts verschwindet, wenn die Bewegung stationär ist; es fällt aus der Betrachtung auch dann heraus, wenn sie periodisch ist und man den Gesamtverlust während einer Periode berechnet; das zweite ist über die gesamte einen Querschnitt passierende Wassermenge zu erstrecken, und dabei H_1 bzw. H_2 als der Wert von H beim Eintritt des Wasserfadens in V, bzw. beim Austritt aus V anzusehen. *Bei stationärer Strömung ist der sekundliche Energieverlust durch Reibung gleich der Änderung der Strömungsenergie im Ein- und Austritt der Wasserfäden, vermindert um die von den Zähigkeitsspannungen an der Oberfläche geleistete Arbeit; analog ist bei periodischer Bewegung der Gesamtverlust einer vollen Periode zu bestimmen.*

An *ruhenden* Führungsflächen ist L' immer null; wird also V nur von solchen und von zwei beliebigen Querschnitten begrenzt, so darf man den Energieverlust mit der Änderung von H dann identifizieren — was in der technischen Literatur *immer* geschieht — *wenn die Geschwindigkeitsverteilung in beiden Querschnitten annähernd dieselbe ist, oder die Stromlinien merklich parallel und zu den Querschnitten normal liegen.* Für das Rohr (Fig. 10) kann man den Energieverlust zwischen A und B ganz wohl durch die Differenz der H ausdrücken, keineswegs

aber den zwischen C und D; hier würde ein Fehler entstehen, der von der Größenordnung des U ist. Für AC mag der Fehler, wenn das Rohr genügend lang und eng ist, von geringerer Größenordnung werden.

Fig. 10.

3. In der technischen Hydraulik ist es üblich, für gewisse einfache Bewegungstypen, die durch die Werte weniger Konstanten charakterisiert werden, den Betrag von U, bzw. $\int(H_1 - H_2)dq$ *durch Experimente als Funktion jener Konstanten zu ermitteln.* Die Berechtigung zu einem solchen Verfahren gründet sich auf die Voraussetzung der Existenz einer Eigenströmung für das betreffende Gebiet. Auch vom Standpunkt der Navier-Stokesschen Theorie kann man die Notwendigkeit solcher spezieller Versuche, wenigstens für den einfachsten Fall der zylindrischen Strömung nicht von vornherein bestreiten, denn es ist sehr wahrscheinlich, daß die den turbulenten Bewegungen entsprechenden Integrale der Stokesschen Gleichungen von der Beschaffenheit der Wände im einzelnen, ihren periodischen Unebenheiten usw. abhängen, die dann eben durch gewisse Rauhigkeitskoeffizienten charakterisiert werden müssen.

Unserer in § 8, 5 dargelegten Auffassung entsprechend bedeutet die Einführung der experimentell gewonnenen Daten über den Energieverlust im wesentlichen die *bisher noch frei gebliebene und erforderliche Verfügung über den Druckverlauf.* Während wir der Ermittlung des Geschwindigkeitsverlaufes eine Annahme über die *Querverteilung* von H zugrunde legten, bedarf es zur Bestimmung des Druckes einer Annahme über die Änderung von H *längs* der Strömung. Man muß dabei beachten, daß die Funktion H bei Anwendung der Helmholtzschen Gleichungen zur Näherungsdarstellung turbulenter Bewegungen den *Mittelwert* der Strömungsenergie an jeder Stelle bedeutet. Im Folgenden sind stets Verhältnisse vorausgesetzt, die wesentlich oberhalb der kritischen Grenze, also im Anwendungsgebiet unserer Theorie liegen.

Fließt die sekundliche Wassermenge Q (scheinbar) *gleichförmig und in parallelen Bahnen* durch ein kreisförmiges Rohr vom Durchmesser d mit der über den Querschnitt gemessenen mittleren Geschwindigkeit v, so beträgt der Energieverlust auf die Länge l, nach vielfachen Versuchsergebnissen:

$$U = Ql\frac{v^2}{d}\cdot k$$

$$\frac{1}{Q}\int(H_1 - H_2)\,dq = \frac{v^2}{2g}\,\frac{l}{d}\,\zeta, \tag{67}$$

wobei k bezw. ζ ein in verhältnismäßig engen Grenzen mit Geschwindig-

keit und Querschnitt veränderlicher Koeffizient ist. Eine gut brauchbare Formel von **Lang**[1]) gibt für Rohre mit geringen Unebenheiten

$$\zeta = 0.020 + \frac{0.0018}{\sqrt{v d}}, \ (v, d \text{ in m}).$$

Man überträgt nun dieses Resultat zunächst auf zylindrische Strömung bei beliebiger Querschnittsform, indem man an Stelle von d den vierfachen Wert des sog. *„hydraulischen Radius"*, das ist des Quotienten von Querschnittsgröße durch Umfang einführt. Die **Naviersche** und die **Boussinesqsche** Theorie führen zu verwickelteren Abhängigkeiten des U von der Gestalt des Rohres, die zu berücksichtigen nach dem heutigen Stande der Verhältnisse wenig Zweck hätte.

In Fällen, in denen die mittlere Strömungsrichtung und die Querschnittsgröße sich mäßig und allmählich ändern (*mouvement graduellement varié*), wird man zur Abschätzung von U dieselbe Formel benützen dürfen, indem man für v und d mittlere Werte einsetzt. Dabei wird man beachten, daß jede Krümmung und jede Querschnittsänderung, *insbesondere aber eine Erweiterung*[2]) ungünstig wirkt; die sorgfältige Berechnung des über den ganzen Strömungsverlauf erstreckten Integrals mit Berücksichtigung aller Veränderlichkeiten von v, d usw. hat kaum einen Wert.

An Stellen, wo Richtung oder Querschnitt der Strömung sich plötzlich ändern *(mouvement brusquement varié)*, entstehen die bereits erwähnten (§ 8, 5) Gebiete heftig lokal bewegter Flüssigkeit, die an den Grenzflächen, in denen sie die Hauptmasse der Strömung berühren, dieser unausgesetzt Energie entziehen. Von der Anschauung ausgehend, daß hier Eigenströmungen durch die Hauptabmessungen des Sprunges (und etwa noch die Rauheitskoeffizienten) definiert werden, dürfen wir wieder von experimentell ermittelten Widerstandsgesetzen ausgehen; doch sind hier auch die empirisch gewonnenen Kenntnisse noch recht unvollständig. Die Beschränkung auf die im Turbinen- und Pumpenbau vorkommenden Abmessungen wollen wir in den drei typischen Fällen der *Erweiterung, Verengung und Richtungsänderung* (siehe Fig. 11) wenn c_1 und c_2 die mittlere Geschwindigkeit *vor* bzw. *nach* der Änderung bezeichnen, setzen:

$$U = \alpha \gamma Q \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} = \alpha \gamma Q \frac{c_1^2 + c_2^2 - 2 c_1 c_2 \cos(c_1, c_2)}{2g} \tag{68}$$

---

1) „**Hütte**", des Ingenieurs Taschenbuch, Berlin 1902, S. 240.

2) Auf dieses wichtige Ergebnis seiner noch nicht publizierten Untersuchungen hat mich Prof. **Prandtl**, Göttingen hingewiesen.

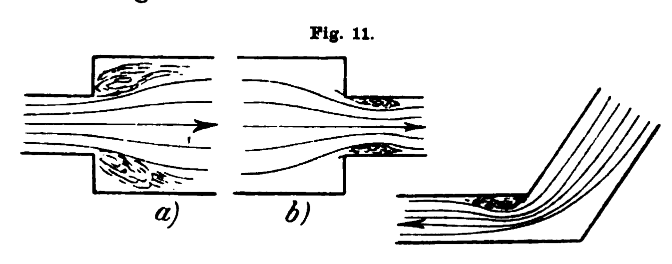


mit

$$\begin{aligned} \alpha = {} & 1{,}2 \sim 1{,}3 \text{ im ersten}[1], \\ (68') \qquad & 0{,}4 \sim 0{,}5 \text{ im zweiten}[2], \\ & 0{,}7 \sim 1{,}0 \text{ im dritten Fall.} \end{aligned}$$

In den Verhältnissen der drei Zahlen spiegelt sich ungefähr das gefühlsmäßig erkannte Größenverhältnis der drei Turbulenzgebiete wieder (Fig. 11). Der Spielraum für α muß in dem dritten Falle ein großer sein, da es sich hier um Vergrößerung *oder* Verkleinerung von c handelt; doch rechtfertigt das Bedürfnis der Turbinentheorie das vorläufige Festhalten an einem einheitlichen Ausdruck.

Fig. 11.



Gleichung (68) und (68′) haben für uns lediglich die Bedeutung *rein empirischer Formeln* von sehr beschränkter Giltigkeit. Der vielfach verbreitete Gedanke, den Ansatz für den ersten Fall aus einer Analogie mit dem Stoßvorgang unelastischer Körper abzuleiten (Carnot-Bordasche Formel), entbehrt jeder Grundlage; die häufig vorkommende Heranziehung der Reaktionsgleichung zur Berechnung von U hat nur den Sinn, daß anstelle der unmittelbaren Beobachtung von U eine unkontrollierbare und willkürliche Annahme über den Druckverlauf eingeführt wird. Auch die Ableitung des zweiten Ansatzes aus einer Verbindung der Stoßvorstellung mit der vom „Ausfluß unter Wasser" hat kaum großen Wert.

4. Wir betrachten jetzt eine zusammenhängende Wassermenge V, die *in ihrem Innern mit der Oberfläche A eines, im allgemeinen bewegten, starren Körpers in Berührung steht;* die äußere Begrenzung B sei so gestaltet, daß die auf A bezogenen, relativen Stromlinien innerhalb B ununterbrochen stetig verlaufen. Zerlegt man die vom Wasser an seiner Oberfläche $(A + B)$ abgegebene Arbeit in die Theile L_A und L_B, so ist nach dem Energieprinzip

$$L_A = -L_B - \int \frac{\partial'}{\partial t}\left(\mu \frac{c^2}{2} + \gamma h\right) dV - \int_{(V)} v \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mu c^2}{2} + \gamma h\right) dV - U$$

---

1) Hauptsächlich nach Versuchen von Bär, Dinglers polytechn. Journal 1907, S. 177 und in Übereinstimmung mit gebräuchlichen Rechnungen.

2) Aus den Versuchsergebnissen und der Formel von Weisbach berechnet, vgl. „Hütte", Des Ingenieurs Taschenbuch, Berlin 1902, S. 244.

und mit

$$L_B = L_B' - \int_{(B)} c_n p\,do = L_B' - \int_{(B)} (u_n + v_n) p\,do = L_B' - \int_{(B)} p\,dq' - \int_{(B)} u_n p\,do,$$

$$(69) \quad L_A = -\int \frac{\partial'}{\partial t}\left(\frac{\mu c^2}{2} + \gamma h\right) dV - \gamma \int (H_2 - H_1)\,dq' - (U + L_B') - \int_{(B)} u_n p\,dv.$$

Ist die Bewegung von A und auch die Relativbewegung des Wassers eine periodische, so ergibt sich der Satz: *Die während einer vollen Periode an A abgegebene Arbeit vermehrt um den Energieverlust durch Reibung ist gleich dem Zeitintegral der auf die relativen Stromfäden bezogenen Änderung von H, wenn die Begrenzung so gewählt werden kann, daß die zu ihr senkrechte Komponente der Führungsgeschwindigkeit und die von den Zähigkeitsspannungen in ihren Punkten geleistete Arbeit verschwindet;* andernfalls tritt außer dem letztgenannten Arbeitsbetrag noch die Größe $\int_{(B)} u_n p\,do$ auf, die einem *Teil* der vom Druck p an der Oberfläche geleisteten Arbeit entspricht; die Begrenzung B selbst ist *relativ* gegen A dauernd festzuhalten.

Geht man unmittelbar von der Betrachtung der absoluten Bewegung aus, die ja im vorliegenden Falle ebenfalls periodisch ist, so hat man zunächst die Überlegungen von § 9, 3 zu wiederholen, durch die man zeigen kann, daß unsere Gleichungen aufrecht erhalten bleiben, wenn im Innern des Integrationsbereiches nicht-stationäre Flüssigkeitsoberflächen liegen. Umschließt also die jetzt *fest liegende* geschlossene Fläche B eine Reihe von periodisch bewegten starren Körpern, so gilt der Satz: *die vom Wasser während einer vollen Periode abgegebene Arbeit, vermehrt um den Energieverlust, ist gleich der Änderung der auf die absoluten Stromfäden bei ihrem Durchgang durch B bezogenen Strömungsenergie, vermindert um die Oberflächenarbeit der Zähigkeitsspannungen auf B.* Daraus folgt auch, daß eine stationär bewegte Flüssigkeit an einen ruhenden oder bewegten starren Körper — von der Wirkung der Zähigkeit abgesehen — keine Arbeit abgeben, und keine von ihm aufnehmen kann.

Hat die Führungsbeschleunigung ein Potential F, so kann man auch die *relative* Strömungsenergie (s. § 2, 7)

$$H' = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h + F$$

einführen und findet, wenn auf der Begrenzungsfläche B überall u_n verschwindet, für die relativ-stationäre Bewegung, in

$$(70) \qquad \gamma \int_{(Q)} (H_1' - H_2')\,dq' = U + L_B'$$

das vollständige Analogon zu dem Satze über absolut stationäre Bewegung unter 2 (66).

5. Durch die vorstehenden Sätze, aus deren Bestehen wir die Berechtigung zu der in § 2 eingeführten Bezeichnung „*Strömungsenergie*“ schöpfen, erhalten die zahlreichen in der technischen Literatur, namentlich in der der Turbinentheorie zur Sprache kommenden Beziehungen ihre präzise Formulierung. Man erkennt auch deutlich, daß die nicht selten anzutreffende Auffassung, durch die Größe von H werde allgemein der „Arbeitswert eines Wasserteilchens“ gemessen, nicht gerechtfertigt ist, es sei denn, daß man die Möglichkeit spurlosen Verschwindens von derartigem „Arbeitswert“ zugibt. Passender erscheint es uns, zu sagen: Während immer $\left(\frac{c^2}{2g} + h\right) dV$ die Arbeitsfähigkeit eines bestimmten *Volumelementes* dV gibt, mißt $\left(\frac{c^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma}\right) dq$ den Arbeitswert einer stationären oder periodischen Strömung *an einer bestimmten Stelle* des Raumes.

Bei allen Wasserkraftmaschinen und ihren Umkehrungen, bei Turbinen, Kolben- und Kreiselpumpen, Wassersäulenmaschinen usw. handelt es sich — soweit vom dauernden Betriebszustand die Rede ist — um periodische Flüssigkeitsbewegung, die durch periodisch bewegte Führungsflächen vermittelt wird. Sieht man von dem Einfluß der Zähigkeit ab, so beträgt die Änderung von H für ein bestimmtes Teilchen

$$\frac{dH}{dt} = c\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c}{g}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{71}$$

Es ist also für den Eintritt eines Energieaustausches *wesentlich, daß der Druck nicht stationär ist.* Er ändert sich im allgemeinen stetig und in gleichem Sinne, solange Flüssigkeit an der betrachteten Stelle sich befindet, und erfährt einen endlichen Sprung im entgegengesetzten Sinn, während der starre Körper, der den Energieaustausch vermittelt, die Stelle passiert.

Welche Bedeutung dem in § 8, 9 ausgesprochenen Satze über die Gesamtänderung von H angesichts der Wirkung der Zähigkeit zukommt, muß noch unentschieden bleiben.

§ 11. Die Bewegungsgleichung für das Kreiselrad.

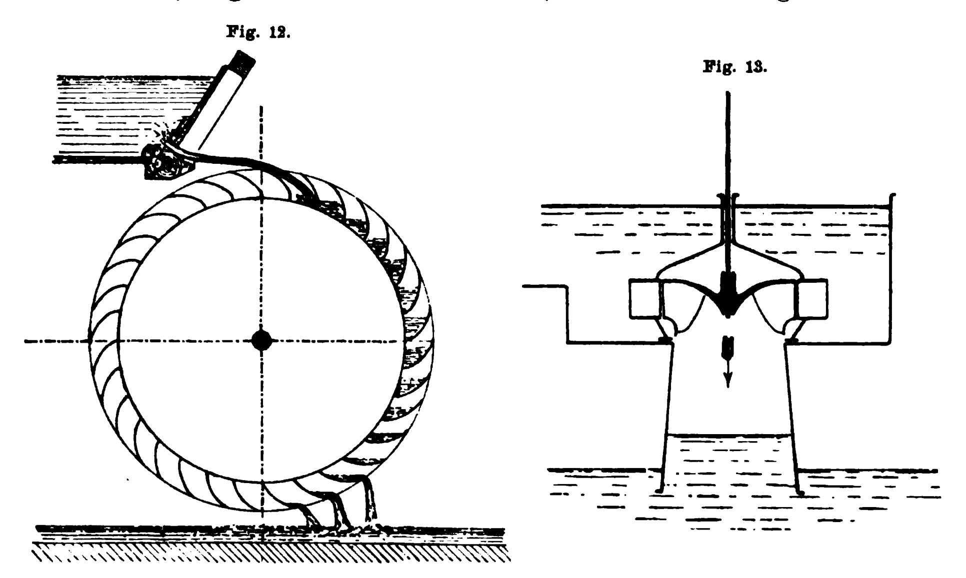
1. Unter einem *Kreiselrade* verstehen wir einen als starr anzusehenden festen Körper, der um eine feste Achse rotiert und an seinem Umfang eine Reihe kongruenter, gleichförmig um die Achse angeordneter Hohlräume enthält. Die Begrenzung der letzteren besteht teils aus koaxialen Drehflächen, teils aus den sogen. Schaufelflächen. Der

Radkranz selbst wird also aus einem Drehungskörper und den untereinander kongruenten Schaufeln gebildet; dazu tritt das Gerüst, das den Kranz mit der Nabe verbindet, und dessen Gestaltung auf die Bewegungsvorgänge nicht von wesentlichem Einfluß ist.

Der auffallendste Unterschied innerhalb der sehr großen Mannigfaltigkeit verschieden gestalteter Schaufelräder besteht zwischen solchen mit einrandigen und solchen mit zweirandigen Schaufelzellen (Turbinenkanälen). Fig. 12 und 13 zeigen Beispiele, die den beiden Typen entsprechen, Fig. 12 den Schnitt durch ein gewöhnliches, oberschlächtiges Wasserrad, Fig. 13 den durch Laufrad, Leitrad und Saugrohr einer

Fig. 12.

Fig. 13.



Francis-Turbine. Die Unterscheidung deckt sich nicht mit der üblichen, übrigens etwas schwankenden Einteilung in Wasserräder im engeren Sinne einerseits, Turbinen (und Kreiselpumpen) andrerseits; so hat beispielsweise das Millotsche Wasserrad[1]) zweirandige Zellen.

Je nachdem ein Wasserfaden innerhalb der Schaufelzelle im wesentlichen auf einer Zylinderfläche oder in einer zur Achse senkrechten Ebene verläuft, spricht man von *axialen* oder *radialen* Kreiselrädern; im letzteren Falle unterscheidet man noch die „außen beaufschlagten" oder „äußeren" von den „inneren", je nachdem der Wassereintritt außen oder innen erfolgt. „*Druck-* oder *Freistrahl*-Turbine" nennt man ein Rad, wenn das Wasser in der Schaufelzelle eine freie Oberfläche hat, „*Überdruck*-Turbine", wenn dies nicht der Fall ist; von der „Grenz-

1) Bach, Die Wasserräder, Stuttgart 1886, S. 125.

turbine" stellt man sich vor, daß die Kanalweite an jeder Stelle der Weite des „freien" Strahles gleich ist. Schließlich heißt ein Rad „vollbeaufschlagt", wenn ihm Wasser auf dem ganzen Umfang zugeführt wird, andernfalls „partial beaufschlagt".

Die vorstehenden Unterscheidungsmerkmale kommen in erster Linie bei den als Motoren arbeitenden Rädern in Frage. Bei ihrer Umkehrung, d. i. bei Verwendung von Kreiselpumpen hat man es in der Regel mit vollbeaufschlagten, mit Durchgangszellen versehenen, Überdruck-Rädern zu tun. Allein man kann recht wohl die uralten Schöpfräder als die konsequente Umkehrung der gewöhnlichen vertikalen Wasserräder ansehen, während die Verwendung von Freistrahl-Laufrädern bei Pumpen, wenigstens theoretisch, nicht ausgeschlossen ist.

2. Das auf das Rad wirkende, *nicht* vom Wasser herrührende, *eingeprägte Kraftmoment* M um die Rotationsachse enthält immer einen dem Bewegungssinne entgegengerichteten Bestandteil M': das Moment der Reibung der Radwelle in ihren Lagern, und eventuell anderer an festen Flächen oder an Luft gleitender Teile des Rades; ferner einen zweiten $M^{(a)}$, dessen Vorzeichen von der Verwendung des Rades als Motor oder Generator abhängt.

Um das *vom Wasser ausgeübte Moment* zu berechnen, wählen wir, entsprechend § 9, eine Begrenzungsfläche B, die mit Oberflächenteilen des Rades zusammen ein geschlossenes Gebiet ergibt, in dem alle vom Wasser berührten Teile des Rades, aber keine weiteren festen Körper eingeschlossen sind. Bezeichnen wir mit r den Abstand eines Punktes von der Achse, mit c_u die zur Achse und zu r senkrechte Komponente von c, so ist das gesuchte Moment nach (59) und (60) gleich

$$M^{(G)} + M^{(P)} + \mu\int (c_u r)_{(2)}^{(1)}\, dq' - \mu\int \frac{\partial'(c_u r)}{\partial t}\, dV.$$

Hierin bedeutet $M^{(P)}$ das Moment aller Oberflächendrücke auf B, das Integral über dq' ist auf alle ganz im Wasser liegenden Teile von B zu erstrecken und das Volumintegral in der im § 9, 3 besprochenen Weise zu deuten. Bezeichnet J das Trägheitsmoment, ω die Winkelgeschwindigkeit des Radkörpers, so wird

$$(72)\qquad J\frac{d\omega}{dt} = M + M^{(G)} + M^{(P)} + \mu\int (c_u r)_{(2)}^{(1)}\, dq' - \mu\int \frac{\partial'(c_u r)}{\partial t}\, dV.$$

Diese Gleichung[1]) gilt ohne jede Vernachlässigung, ohne eine besondere Voraussetzung über die Natur der Flüssigkeit, und für die allgemeinste

1) Die Gleichung findet sich im wesentlichen bei Prášil, Vergleichende Untersuchungen an Reaktions-Niederdruckturbinen, Zürich 1905, S. 21 (S. A. Schweizer Bauz. B. 45).



Bewegungsform; man erkennt, daß weder die *Reibungsverluste* im Innern der Strömung, noch die sogen. *Stoßwirkung* des Wassers, noch die *Radseitenreibung im Wasser* usw. eine explizite Berücksichtigung verlangen.

Kennt man, abgesehen von der Gestalt des Rades, seine Stellung und Geschwindigkeit durch einen längeren Zeitraum bis $t = t_0$, ferner die Randbedingungen der Strömung außerhalb des Rades in dem Umfange, wie es nach § 8, 3 notwendig erscheint, also den Verlauf der festen Führungsflächen zu jeder Zeit usf., so läßt sich damit die Verteilung der Geschwindigkeiten in einem hinreichend großen, den durch B begrenzten Wasserkörper umfassenden, Raum bestimmen. Sie ergibt, wenn das äußere Drehmoment M in seiner Abhängigkeit von der Stellung des Rades, seiner Geschwindigkeit und eventuell von t gegeben ist, den Wert der rechten Seite von (72), also den Wert von w zur Zeit $t_0 + dt$, und gestattet daher nach § 8, 2 die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung für $t_0 + dt$; von hier an kann in gleicher Weise fortgefahren werden. Die Glieder rechts in (72) verhalten sich also sämtlich in der Rechnung so wie gegebene Funktionen von t, ϑ, ω und $\frac{d\omega}{dt}$ (wobei der Winkel ϑ die augenblickliche Stellung des Rades kennzeichnet) und man hat in (72) *die Differentialgleichung zweiter Ordnung für* ϑ, *durch welche die Bewegung des Rades bestimmt wird.*

Die klassische Hydromechanik hat die Bewegungsgleichungen für starre Körper, die mit strömendem Wasser in Wechselwirkung stehen, nur unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Flüssigkeit reibungslos, die Strömung wirbelfrei ist. Für den hier vorliegenden Fall eines einzigen Freiheitsgrades führt jene Theorie zu der Gleichung der lebendigen Kraft, auf deren allgemeine Fassung — mit Berücksichtigung der Dissipation — wir im folgenden Paragraphen zurückkommen. Die Ermittlung der Strömung im Kreiselrade aus den Randbedingungen wird uns im letzten Abschnitt beschäftigen.

3. Läßt man einzelne unwesentliche Umstände außer acht, welche die Bewegung nur wenig beeinflussen, wie etwa das Durchdringen der Radwelle durch das Wasser, das Durchsickern von Wasser aus dem Spalt zwischen Laufrad und Leitapparat usf., so kann man der äußeren Begrenzung B eine einfache Gestalt geben: je nachdem die Radzellen einrandig oder zweirandig sind, genügt eine oder genügen zwei Drehungsflächen zum Abschluß (vgl. Fig. 12 u. 13). Der Raum V, zu dessen Begrenzung jedenfalls sämtliche Schaufelflächen gehören, ist im ersten Falle einfach, im zweiten $(n + 1)$fach zusammenhängend, wenn n die Anzahl der Schaufeln ist.

Da jetzt auf B überall $u_n = 0$ ist, kann man in dem Volumintegral

je nach Bedarf $\frac{\partial}{\partial t}$ oder $\frac{\partial'}{\partial t}$ setzen. Das Moment $M^{(r)}$ wird ausschließlich von den Zähigkeitsspannungen bestimmt, die in den Tangentialebenen der Rotationsflächen auftreten. Das Moment $M^{(G)}$, das bei Rädern mit vertikaler Achse immer verschwindet, wird bei unserer Wahl von B auch Null, wenn das Rad gleichförmig auf seinem ganzen Umfang beaufschlagt ist, und vernachlässigbar klein, sobald nur die untersten Zellen Wasser enthalten (Tangentialräder).

In Anlehnung an die übliche Benennungsweise kann man als *Wasserräder im engeren Sinne* (d. h. im Gegensatze zu Turbinen) diejenigen Kreiselräder bezeichnen, in deren Bewegungsgleichung $M^{(G)}$ von ausschlaggebender Bedeutung ist. Das Wasser wirkt der Hauptsache nach durch ruhigen Druck, und man wird mit Rücksicht auf die geringen hier auftretenden Wassergeschwindigkeiten die kinematischen Glieder in (72) vernachlässigen dürfen. Unter der Annahme, daß das Wasser in den Radzellen sich in relativer Ruhe befindet, kann man leicht die in jeder enthaltene Wassermenge bestimmen; als freie Oberfläche pflegt man dabei die durch die Bedingung konstanten Druckes definierten Kreiszylinderflächen

$$\mu r^2 \omega^2 - g z = \text{konst.}$$

(z = vertikal gemessene Ordinate) anzusehen. Doch scheint die Berücksichtigung der Krümmung angesichts des approximativen Charakters der ganzen Überlegung — findet ja doch ununterbrochen ein Zu- und Abfluß statt — kaum gerechtfertigt. Über den Wert von $M^{(r)}$, der namentlich bei den sogen. *Kropfrädern* nicht unbedeutend sein dürfte, liegen ausreichende Versuchsresultate nicht vor. Wenn man M' mit $M^{(r)}$ zu einem Moment der Bewegungswiderstände vereinigt und dieses als Bruchteil des nutzbaren Drehmomentes $M^{(a)}$ ansetzt, so gelangt man zu der einfachen Gleichung

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\eta} M^{(a)} + M^{(G)}, \quad \eta < 1, \tag{73}$$

die wir hier nicht weiter verfolgen. Die Schöpfräder sind in ganz derselben Weise zu behandeln.

Außer den in Rede stehenden, passend als „Gewichtsräder“ zu bezeichnenden Wasserkraftmaschinen pflegt man zu den Wasserrädern im engeren Sinne auch die „Stoßräder“ zu zählen, die im Bau den ersteren ähneln, für deren Bewegung aber das *kinematische* Glied in der Gleichung ausschlaggebend wird. Hier würde eine eingehende theoretische Ausmittlung der Geschwindigkeitsverteilung größere Schwierigkeiten bereiten, als es der geringen praktischen Bedeutung

der Sache entspricht, andrerseits ist ein brauchbarer Anhaltspunkt zu einer Abschätzung der Wasserwirkung aus den bisherigen Versuchsergebnissen nicht zu gewinnen. Die üblichen „Theorien", die meist auf unzutreffenden Vorstellungen über Stoßverluste u. dgl. beruhen, führen in der Regel zu einer ungerechtfertigt großen Unterschätzung dieser Räder gegenüber den eigentlichen Turbinen. Als rationelle Ausgestaltung der älteren Stoßräder hat man die gegenwärtig viel verwendeten *Peltonräder* anzusehen.

4. Für die *Francis-Turbine* (Fig. 13), welche den vorherrschenden Typus der vollbeaufschlagten Überdruck-Turbine bildet, soll die Diskussion der Gleichung (72) etwas weitergeführt werden. Die Wasserzuströmung erfolgt längs des äußeren kreiszylindrischen Mantels und wird durch die Leitkanäle des „Leitrades" vermittelt, das feststeht und sonst seinem Bau nach einem radialen Kreiselrade gleichkommt; der Wasseraustritt geschieht in wesentlich axialer Richtung, und wir wollen der weiteren Betrachtung eine der üblichen Bauarten zugrunde legen, indem wir an das Laufrad anschließend ein sogen. Saugrohr als vorhanden voraussetzen (Fig. 13). Als Begrenzung B soll der Hauptsache nach die Kreiszylinderfläche zwischen Leit- und Laufrad, sowie eine beliebige Drehungsfläche, die den Rotationshohlraum des Rades gegen das Saugrohr abschließt, dienen.

Da man mit großer Annäherung voraussetzen darf, daß der Einfluß der außerhalb von Leit- und Laufrad liegenden Randbedingungen sich in allen Punkten eines Parallelkreises in gleicher Weise äußert, so ist die Bewegung des Wassers und des Rades während des konstanten Betriebszustandes (d. i. bei unveränderten äußeren Bedingungen) periodischen Schwankungen unterworfen, deren Zahl $\frac{m\omega}{2\pi}$ in der Sekunde beträgt, mit m als kleinstem gemeinschaftlichem Vielfachen der Schaufelzahlen in den beiden Rädern. Wir wollen ω, M und die c mit Rücksicht auf die geringe Größe der Schwankungen — die von ω sind der Beobachtung in der Regel überhaupt nicht zugänglich — stets als Mittelwerte über eine volle Periode ansehen, was auch unserem Standpunkt gegenüber den ohnehin unvermeidlichen, von der Turbulenz herrührenden Pulsationen der Wasserbewegung entspricht. Es gilt dann, solange die äußeren Bedingungen unverändert erhalten werden:

$$M + M^{(P)} + \mu \int (c_u r)^{(1)}_{(2)} \, dq = 0, \tag{74}$$

eine Beziehung, die ω und M verknüpft.

Über die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung bei stationärem Betrieb von ω und der Gesamtwassermenge Q läßt sich eine

mit großer Annäherung gültige Hypothese aussprechen, die namentlich durch die sorgfältigen Versuche von Prášil[1]) weitgehende Bestätigung erfahren hat. In dem praktisch auftretenden Variationsbereich der Größen ω und Q *bleiben für jede Turbine die absoluten Stromlinien innerhalb der Leitradkanäle, die relativen innerhalb der des Laufrades, von ω und Q nahezu unabhängig.* Man kann den Satz auch dahin formulieren, daß sich stets ein Übergang von der Eigenströmung im Leitrade zu der im Laufrade innerhalb des Schaufelspaltes vollzieht. Denken wir uns unsere zylindrische Eintrittsfläche dicht an die Austrittskanten der Leitschaufeln herangerückt, so haben wir die Werte von $c_u^{(1)}$ als dem Q proportional und sonst durch die Gestalt der Leitkanäle allein bestimmt anzusehen. Die Ableitung, welche die Wasserfäden im Spalt zwischen den beiden Rädern erfahren können, und die gegebenenfalls zu großen Energieverlusten Veranlassung wird, kommt in der Gleichung nicht explizite zum Ausdruck; es ist auch bei der verhältnismäßig großen Zahl von Leitschaufeln recht wohl verständlich, daß die Störungen im Spalt auf die Strömung im Leitrad nicht stark zurückwirken.

Wie die Austrittsfläche, auf der $c_u^{(2)}$ gemessen wird, liegt, wofern sie nur den gestellten Bedingungen genügt, ist für die Berechnung des Integrals in (74) gleichgültig; vernachlässigt man das Drehmoment, das durch Zähigkeitsspannungen des Wassers nach dem Austritt aus dem Schaufelraum auf das Rad noch ausgeübt werden kann, so läßt sich als Austrittsfläche auch unmittelbar die Drehungsfläche wählen, auf der die Endkanten der Schaufeln liegen.

Die Gleichung (74) erhält nun die Form

$$M + M^{(F)} + A Q^2 + B Q \omega = 0. \tag{75}$$

Die Werte der Konstanten ergeben sich aus:

$$Q^2 A = \mu \int (c_u r)_{(1)}\, dq - \mu \int (v_u r)_{(2)}\, dq, \quad Q \cdot B = -\mu \int r_2^2\, dq. \tag{75'}$$

Prášil hat an vier verschiedenen Laufrädern unter Messung von Q, ω und M Versuche angestellt und dabei gefunden, daß Gl. (75) in sehr großer Annäherung erfüllt wird, wenn man $M^{(F)}$ *vollständig vernachlässigt* und A und B als konstant ansieht. Ob die Annahme der Konstanz der Stromlinien auch bei *veränderlichen* ω und M aufrecht erhalten werden kann, ist noch nicht erwiesen; für die kleinen Schwankungen, die eine mit Geschwindigkeitsregulierung ausgestattete Turbine erfährt, wird es wohl eine hinreichende Näherung sein, dies anzunehmen und

1) Vergleichende Untersuchungen an Reaktions-Niederdruckturbinen, Zürich 1905; s. auch Schweizer Bauzeitung B. 45.



dabei in der Berechnung des Volumintegrales lediglich die Wassermasse *im Laufrade* (d. h. ohne Beachtung der Vorgänge im Spalt) mit ihren relativ-konstanten Stromlinien zu berücksichtigen. Man erhält dann als Bewegungsgleichung nach (72)

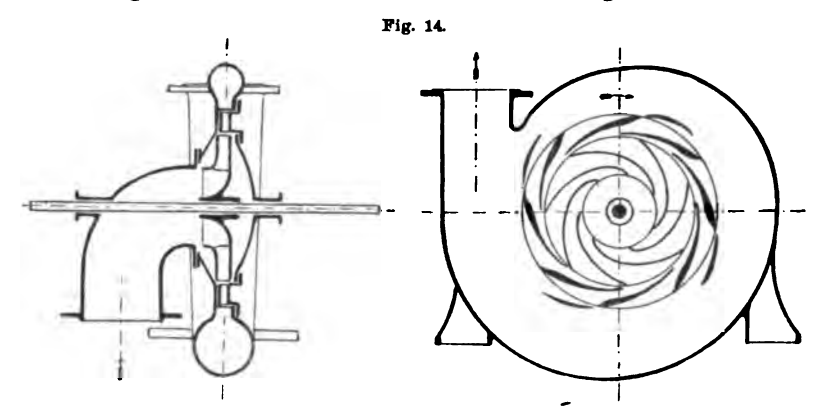
$$J\frac{d\omega}{dt} = M + M^{(F)} + AQ^2 + BQ\omega + A_1\frac{dQ}{dt} + B_1\frac{d\omega}{dt} \tag{76}$$

$$QA_1 = -\mu\int(v_u r)\,dV, \quad B_1 = -\mu\int r^2 dV. \tag{76'}$$

Neue Versuche der Turbinenbauanstalt Briegleb, Hansen & Comp.[1]) haben das Ergebnis gebracht, daß es bei manchen Laufrädern zwei verschiedene Wertpaare A, B, also auch zwei verschiedene Strömungszustände unter gleichen Bedingungen gibt, von denen der eine bei größeren Werten von M, der andere bei kleineren höhere Stabilität besitzt. Der Unterschied in der Größe von M bei gleichem Q und ω beträgt etwa 3%. Die Versuchszahlen sind nicht in genügendem Maße veröffentlicht, um weitergehende Schlüsse zu gestatten; es mag sein, daß hier, wie auch bei einer von Prášil gelegentlich beobachteten Abweichung von normalem Verhalten ein Zusammentreffen der Periodizität der Turbulenz mit der durch ω und die Schaufelzahlen bedingten im Spiele ist.

5. Über die bei Kreiselpumpen vorliegenden Verhältnisse, die den vorstehend geschilderten dem Wesen nach analog sind, herrscht in

Fig. 14.



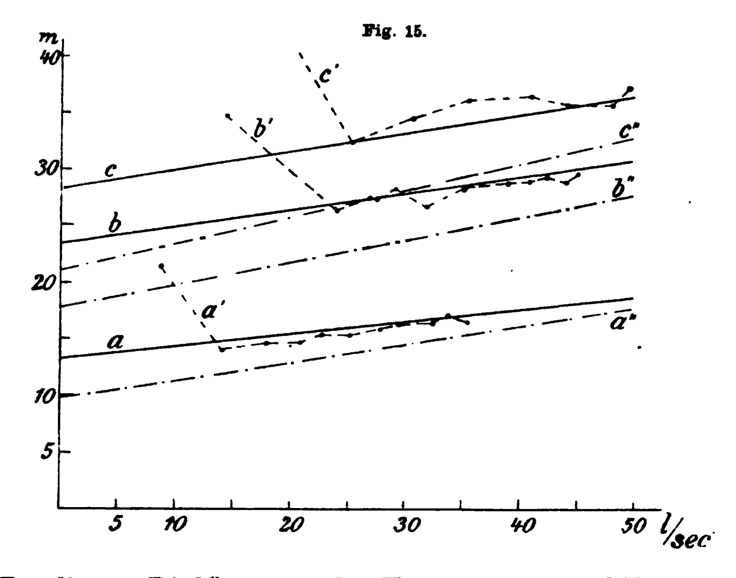
Literatur und Praxis noch vielfach Unklarheit. Fig. 14 zeigt eine übliche Ausführungsform der einstufigen Pumpe: Wassereintritt innen, ohne Zuführungsschaufeln; Austritt am zylindrischen Umfang mit anschließendem Leitapparat; die Kanäle der beiden Räder verlaufen

1) V. Graf u. D. Thoma, Neuere Schnellläufer-Turbinen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1907, S. 1012.

größtenteils in einer zur Achse senkrechten Ebene, die axiale Dimension der Kanäle ist gering.

Planmäßig durchgeführte Versuche, die genügend eingehend und sorgfältig wären, um die Übertragbarkeit der bei Francis-Turbinen als zutreffend erkannten Annahmen prüfen zu lassen, stehen noch aus. Man kann immerhin aus den veröffentlichten Versuchsergebnissen mit einiger Sicherheit die Folgerung ziehen, daß für die im wirklichen Betriebe vorliegenden Verhältnisse, insbesondere für *nicht zu kleine Werte von Q und ω, die Annahme der Konstanz der Stromlinien und des Verschwindens von $M^{(P)}$ mit genügender Annäherung zutreffen dürfte.*

Fig. 15.



Für die von Biel[1]) untersuchte Kreiselpumpe von 362 mm äußerem Durchmesser sind in Fig. 15 die aus den Querschnittsabmessungen geschätzten Werte von $\frac{\omega}{\gamma Q}\int (c_u r)_{(2)}\, dq$ als Funktionen von Q bei den Umlaufzahlen 600, 800 und 880/min. durch die drei Geraden a bis c dargestellt. Vergleicht man damit die von Biel *gemessenen* Werte der aufgewendeten Leistung, abzüglich der von ihm zu 0,5 PS angegebenen Lagerreibungs-Arbeit, die durch Q dividiert in den (gestrichelten) Linien a' bis c' wiedergegeben sind, so erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung. Es ist auch verständlich, daß mit dem Kleinerwerden von Q der Einfluß von $M^{(P)}$ immer bedeutender werden muß, und gleichzeitig die Abschätzung der mittleren Geschwindigkeit aus den Kanal-

1) Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. Mitteil. u. Forschungsarb., herausg. v. Ver. deutscher Ing. H. 42, Berlin 1907. S. 19.



querschnitten zu immer größeren Fehlern Veranlassung gibt. Wenn die Pumpe überhaupt nicht mehr fördert, also $Q = 0$ ist, dann halten M und $M^{(P)}$ einander das Gleichgewicht.

Biel setzt, dem allgemein üblichen Vorgang folgend, die „theoretisch zuzuführende Leistung" gleich $\omega\mu\int(c_u r)\left\{{2 \atop 1}\right\} dq$, wobei $c_u r$ Mittelwerte sind, die am Eintritt und Austritt des *Lauf*rades durch die dort herrschenden Querschnitte bestimmt werden; unserer Auffassung zufolge war jedoch im Mittel $(c_u r)_1 = 0$ zu setzen, da die Geschwindigkeit des *zuströmenden* Wassers noch keine tangentiale Komponente besitzt. Die drei Geraden a'' bis c'' in der Figur entsprechen der Bielschen Gleichung. Die Abweichung von den Beobachtungsergebnissen erklärt Biel durch die „Seitenreibung" des Rades im Wasser, zu der sich bei kleinem Q noch eine „Rückströmarbeit" gesellt; wir müssen daran festhalten, daß nur das Spannungsmoment an der *wasserberührten* Oberfläche des herausgeschnittenen Drehungskörpers in $M^{(P)}$ auftritt, das bei größerem Q nicht von bedeutendem Einfluß sein dürfte, während sich in der Rückströmarbeit der Einfluß unregelmäßiger Wasserbewegung äußern mag.

Die in Rede stehende und in der Praxis durchaus herrschende *zentrifugale* Anordnung der Pumpe wird gegenüber der *zentripetalen* durch naheliegende praktische Gründe gerechtfertigt. Allein es ist keineswegs ausgeschlossen, eine Kreiselpumpe außen zu beaufschlagen, ihr das Wasser durch einen Leitapparat zuzuführen und es mit axialer Ablenkung austreten zu lassen — geradeso wie es bei der Francis-Turbine der Fall ist. Bei einer solchen Bauart würde man vielfach im Turbinenbau erprobte Konstruktionsgedanken verwerten können, hätte die Möglichkeit einer bequemeren Regelung usf. Daß dabei der im allgemeinen an den heutigen Ausführungen der Kreiselpumpen noch sehr unbefriedigende Wirkungsgrad unter Umständen günstig beeinflußt werden kann, wird sich im folgenden Paragraphen gelegentlich zeigen.

§ 12. Die Energiebilanz der Kreiselräder.

1. Im dauernden Betriebszustande, bei dem alle Strömungsbedingungen konstant bleiben, und die Wasserbewegung eine periodische ist, hat die in der Sekunde an das Kreiselrad *vom Wasser abgegebene Arbeit* nach den an (69) geknüpften Bemerkungen den Wert

$$L = -\gamma\int(H_A - H_B)\,dq - U - L',$$

wenn alle Größen als Mittelwerte in einer vollen Periode gerechnet werden. Die Indizes A und B beziehen sich auf zwei volle Quer-

schnitte, zwischen denen das Kreiselrad an einer beliebigen Stelle eingeschaltet ist; U ist der Energieverlust, der infolge der Zähigkeit innerhalb des ganzen, zwischen A und B liegenden Gebietes eintritt, und L' die Oberflächenarbeit der Zähigkeitsspannungen auf A und B.

Läßt man jetzt die Schwankungen, die ω während einer Periode erfährt, außer acht, so kann man den Mittelwert von L' auch gleichsetzen dem Produkt aus ω und dem Mittelwert von M, also zufolge (72)

$$L = -M\omega = M^{(G)} + \omega M^{(P)} + \mu\int (uc_u)_{(2)}^{(1)} dq,$$

und

$$(78) \qquad \gamma\int (H_A - H_B)\, dq = \mu\int (uc_u)_{(2)}^{(1)} dq + \omega M^{(G)} + (U + \omega M^{(P)} + L').$$

Hierbei ist es keineswegs erforderlich, daß die Grenzflächen 1 und 2 mit den Querschnitten A und B zusammenfallen; man wird vielmehr für 1 und 2 ähnlich wie früher die Ein- und Austrittsfläche des Laufrades, d. h. eine bzw. zwei Drehungsflächen, welche die Laufradkanäle einschließen, wählen. $M^{(G)}$ und $M^{(P)}$ beziehen sich natürlich auf den von 1 und 2 begrenzten Bereich.

Wenn es sich nicht gerade um Gewichtsräder handelt, verschwindet $M^{(G)}$ oder kann doch vernachlässigt werden; von $M^{(P)}$ fanden wir im vorhergehenden Paragraphen, daß es unter normalen Betriebsverhältnissen für Turbinen und Pumpen sehr klein sei; L' schließlich kann man durch entsprechende Wahl von A und B mindestens auf ein geringes Maß hinunterdrücken. Es bleibt dann, mit $H = H_A - H_B$, als Gleichung, welche die Energiebilanz der Turbinen und Kreiselpumpen im großen und ganzen darstellt:

$$(79) \qquad \gamma\int H dq = \mu\int (uc_u)_{(2)}^{(1)} dq + U,$$

die, gewöhnlich auf einen einzelnen Stromfaden bezogen, in der Literatur in den beiden Formen auftritt:

$$(80\text{a}) \qquad g\eta H = (uc_u)_{(2)}^{(1)} \text{ für den Motor,}$$

$$(80\text{b}) \qquad g\frac{1}{\eta}H = (uc_u)_{(2)}^{(1)} \text{ für den Generator;}$$

dabei ist der „hydraulische Wirkungsgrad" η im ersten Fall definiert durch

$$(80') \qquad \eta = \frac{|\gamma QH| - U}{|\gamma QH|} = \frac{\mu Q (uc_u)_{(2)}^{(1)}}{\mu Q (uc_u)_{(2)}^{(1)} + U},$$

im zweiten durch

$$\eta = \frac{|\gamma QH|}{|\gamma QH| + U} = \frac{\mu Q (uc_u)_{(2)}^{(1)} + U}{\mu Q (uc_u)_{(2)}^{(1)}}.$$

Der Wirkungsgrad ist natürlich verschieden, je nachdem man die Querschnitte A und B wählt; es gibt einen Wirkungsgrad des *Laufrades,* den man erhält, wenn AB mit 1, 2 zusammenfallen, einen Wirkungsgrad der *Maschine* mit Einschluß von Leitapparat, Saugrohr usw., schließlich einen Wirkungsgrad der *gesamten Anlage,* mit Berücksichtigung der Fernleitung des Wassers im Zu- und Ablauf, usf.

2. Um zu einer *Abschätzung der Energieverluste* zu gelangen, die infolge der Zähigkeit des Wassers während des stationären Betriebszustandes eines Kreiselrades auftreten, schlagen wir wieder den in § 10,3 betretenen Weg ein· Dabei beschränken wir uns auf die Verluste *innerhalb* der Maschine und lassen die der Zu- und Ableitung außer acht, die man ohnedies mit den Formeln (67) des § 10 beherrscht.

Der Verlust bei *Durchströmung der Lauf- und Leitradkanäle* und der unmittelbar angrenzenden Teile ist, entsprechend den an Gl. (67) geknüpften Bemerkungen der Hauptsache nach für jede bestimmte Maschine dem Kubus der Durchflußmenge Q proportional zu setzen, wofern man nur mit entfernter Annäherung von einer Konstanz der Stromlinien bei verschiedenen Werten von Q sprechen kann. Der Wert von ζ schwankt bei den üblichen Abmessungen der Turbinenkanäle nicht sehr bedeutend, und man darf hier einen Mittelwert von etwa 0,03 bis 0,05 (bei Berücksichtigung starker Krümmungen usw. vielleicht einen noch höheren) einführen. Für v und d sind Werte einzusetzen, die je einem mittleren Querschnitt im Leitrad, Laufrad, Saugrohr usw. entsprechen und l wird geeigneter Weise auf der Mittelpunktslinie der Querschnitte gemessen.

Von größter Bedeutung ist der für umlaufende Kreiselräder mit Leitapparat typische Energieverlust, der beim *Übergang zwischen den Kanälen des Lauf- und Leitrades* immer dann erfolgt, wenn nicht gerade eine durch die Richtung der zusammentreffenden Schaufelenden bestimmte Beziehung zwischen ω und Q statt hat. Bezeichnet man mit $\mathfrak{c}_1$ bzw. $\mathfrak{v}_1$ den Mittelwert der Absolutgeschwindigkeit im Leitradende bzw. den der relativen im anstoßenden Laufradende, mit $\mathfrak{u}_1$ die Drehgeschwindigkeit im Spalt, so wird durch die Differenz $\mathfrak{c}_1 - (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{u}_1)$ ein Energieverlust begründet, der nach Gl. (68) zu setzen ist

$$U = \alpha \gamma Q \frac{(\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{u}_1)^2}{2g}.$$

Da der senkrecht zum Radius gemessene Querschnitt im Spalt in beiden Rädern nahezu dieselbe Größe erhält, hat $\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{v}_1$ die Richtung von $\mathfrak{u}_1$, und man kann schreiben

$$U = \alpha \gamma Q \frac{(\Delta u)^2}{2g}.$$

Hierin bedeutet Δu die Abweichung der Umfangsgeschwindigkeit von jenem Wert u_1^0, bei dem der in Rede stehende Energieverlust verschwindet; die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ω pflegt man die des „*stoßfreien*" Ganges zu nennen, und wir wollen die eingebürgerte Bezeichnung beibehalten, ohne die ihr zugrunde liegenden Anschauungen zu teilen (s. § 10, 3).

Es ist leicht zu erkennen, daß u_1^0 — immer bei Festhaltung der Mittelwert-Abschätzung für alle Geschwindigkeitsgrößen — dem Q proportional ist, so daß sich Δu linear in Q und ω mit wesentlich konstanten Koeffizienten ausdrückt. Die beiden bisher ins Auge gefaßten Verlustquellen führen somit zu einer Verminderung der mittleren Strömungsenergie um einen Betrag von der Form

$$\Delta H = a' Q^2 + b' Q \omega + c' \omega^2 \tag{81}$$

mit a', b', c' als Konstanten.

Tritt das Wasser einer Wasserkraftanlage während des dauernden Betriebszustandes mit größerer Geschwindigkeit in das Ablaufgerinne ein, als der Eigenströmung daselbst für den betreffenden Wert von Q entspricht, so wird der Überschuß an lebendiger Kraft durch *lokal verstärkte Turbulenz* vernichtet und ist somit als Energieverlust anzusehen. Aus diesen Verhältnissen entsteht der Begriff des „*Austrittsverlustes*". Man pflegt gewöhnlich von der normalen Geschwindigkeit im Ablauf überhaupt abzusehen und somit die ganze lebendige Kraft, mit der das Wasser den freien Unterwasserspiegel erreicht, als Verlust zu betrachten. Bei Gewichtsrädern und andern im Freien arbeitenden Kreiselrädern entsteht ein Austrittsverlust dadurch, daß das Wasser nach dem Verlassen des Laufrades ein Stück weit frei herabfällt, ehe es ins Unterwasser gelangt („Freihängen" des Rades); bei Turbinen mit Saugrohraufstellung durch die Endgeschwindigkeit beim Austritt aus dem Saugrohr. Wir werden unten, gelegentlich der näheren Untersuchung der Francis-Turbinen, eine Hypothese über die Abhängigkeit des Austrittsverlustes von der Umlaufzahl einführen.

Auf die bei Kreiselpumpen vorliegenden Verhältnisse läßt sich der Begriff des Austrittsverlustes nicht übertragen. Hier wird das Wasser in geschlossener Druckleitung fortgeführt, so daß an jeder Stelle der Mittelwert der Geschwindigkeit bei bestimmtem Q von vornherein annähernd gegeben ist. Angemessener Weise wird man der Maschine die in der Regel nicht unbedeutenden Reibungsverluste jener Strecke zur Last legen, auf der der normale Leitungsquerschnitt noch nicht erreicht ist; diese sind der ersten der oben genannten Verlustquellen zuzurechnen. Mit der Behandlung der technisch wichtigen

Frage, wie diese „Umwandlungsverluste“ sich vermindern lassen, beschäftigen sich verschiedene Arbeiten.[1])

Eine weitere rechnungsmäßige Berücksichtigung einzelner kleinerer Verlustquellen, wie man sie in Lehrbüchern häufig findet, erscheint nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen in der Hydromechanik und den vorhandenen experimentellen Grundlagen untunlich. Wir werden sofort zeigen, daß sich auf Grund der hier eingeführten Auffassung die beobachteten Erscheinungen an Kreiselrädern in ihren wesentlichen Zügen gut darstellen lassen.

3. Aus allen Versuchsergebnissen, die an *Francis-Turbinen* und *Kreiselpumpen* gewonnen wurden, kann man den Schluß ziehen, daß für nicht zu kleine Werte von Q der Energieverlust der Wassermengeneinheit übereinstimmend mit (81) *bilinear in* Q und ω gesetzt (und $M^{(P)}$ vernachlässigt) werden darf. Es ist dann mit Rücksicht auf (79) und (75′) wenn wir

$$HQ = \int (H_A - H_B)\,dq$$

schreiben, und Q die gesamte durchfließende Wassermenge bedeutet,

$$H = aQ^2 + 2bQ\omega + cw^2, \tag{82}$$

wobei der Energieverlust zu

$$U = Q[a\gamma \dot{Q}^2 + (2b\gamma - A)Q\omega + (c\gamma - B)\omega^2] \tag{81′}$$

gesetzt ist, und A und B durch (75′) definiert sind. H ist bei Turbinen eine positive Größe und wird hier als das zur Verfügung stehende „Gesamtgefälle“ bezeichnet; bei Pumpen wird H negativ und heißt die „Förderhöhe“. Führt man in (82) an Stelle von Q und ω die „reduzierten“ Werte der Wassermenge und der Winkelgeschwindigkeit

$$y = \frac{Q}{\sqrt{|H|}}, \quad x = \frac{\omega}{\sqrt{|H|}}$$

ein, so erhält man die Gleichung eines zentrischen Kegelschnittes in x, y der sogen. „*Hauptcharakteristik*“ des Kreiselrades

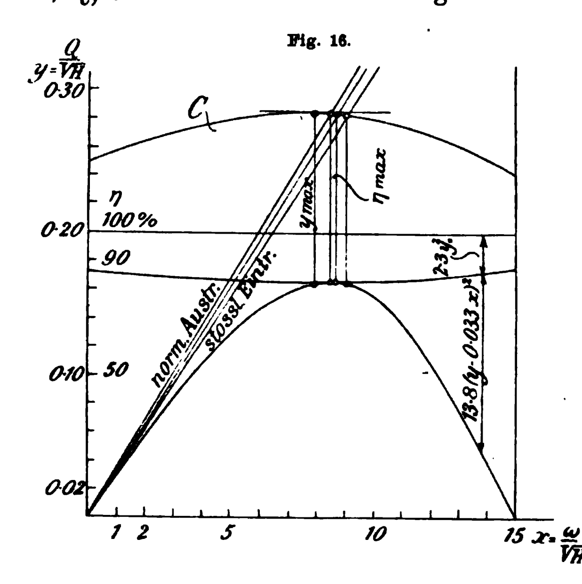
$$ay^2 + 2bxy + cx^2 = 1. \tag{83}$$

Die Existenz dieser Kurve, die vielfach als selbstverständlich vorausgesetzt wird, ist, wie man erkennt, auf das Gebiet beschränkt, in dem die Voraussetzungen: Konstanz der Stromlinien, Verschwinden von $M^{(P)}$ und bilinearer Ausdruck für $\frac{U}{Q}$, erfüllt sind; außerhalb dieses Bereiches

1) Vgl. W. Grun, Die Wirkung von Leitvorrichtungen bei Zentrifugalpumpen und Gebläsen, Z. Ver. deutscher Ing. 1907, S. 548.

läßt sich im allgemeinen die Beziehung zwischen den drei Variablen H, Q, ω nicht auf eine Gleichung zwischen *zwei* Veränderlichen reduzieren. Die Verwendung der Hauptcharakteristiken scheint von J. B. Francis[1]) herzurühren.

Fig. 16.



4. Bei einer *Turbine* ist die Hauptcharakteristik ein *Ellipsenbogen* (Fig. 16, C), dessen höchster Punkt sofort eine bemerkenswerte Eigenschaft zur Anschauung bringt: daß eine gegebene Turbine bei jedem Gefälle nur eine gewisse maximale Wassermenge verbrauchen kann (Schluckfähigkeit der Turbine). Für die von Prášil untersuchte Francisturbine III finden wir die Koeffizienten (aus der von Prášil gegebenen Figur berechnet) bei normaler Leitschaufelstellung zu

$$a = 16{,}05, \quad b = -0{,}126, \quad c = 0{,}00445,$$

und da seinen Angaben zufolge

$$-M = \gamma Q[0{,}659\,Q - 0{,}0106\,\omega]$$

ist, so folgt die „Widerstandshöhe"

$$H_w \equiv \frac{U}{\gamma Q} = 16{,}05\,Q^2 - 0{,}911\,Q\omega + 0{,}015\,\omega^2,$$

ferner der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{M\omega}{\gamma Q H} = 0{,}659\,xy - 0{,}0106\,x^2,$$

und die relative Größe der Widerstandsarbeit:

$$\frac{H_w}{H} = 16{,}05\,y^2 - 0{,}911\,xy + 0{,}015\,x^2.$$

In der Figur sind die Hauptcharakteristik und die Kurve für η als Funktion von x auf Grund der vorstehenden Gleichungen eingezeichnet

1) J. B. Francis, Lowell hydraulic experiments, Boston 1855.

worden; die Linien weichen kaum merklich von den experimentell gefundenen ab. η erreicht sein Maximum, also $\frac{H_w}{H}$ sein Minimum für

$$y = 0{,}0331\,x.$$

Aus den Prášilschen Angaben über die Schaufeldimensionen folgt:

$$y = 0{,}0307\,x, \text{ für stoßlosen Eintritt,}$$

$$y = 0{,}0337\,x, \text{ für normalen Austritt.}$$

Es erscheint die Annahme berechtigt, daß bei Turbinen, für welche die letzteren beiden Werte zusammenfallen, auch der erste ihnen gleich wird; d. h. daß der günstigste Wirkungsgrad dann erreicht wird, wenn das Wasser „stoßfrei" in das Laufrad eintritt und es ohne tangentiale Geschwindigkeitskomponente verläßt. Zerlegt man den Gesamtverlust in einen von x unabhängigen Teil und ein vollständiges Quadrat, so wird

$$\frac{H_w}{H} = 2{,}3y^2 + (3{,}71y - 0{,}122x)^2 = 2{,}3y^2 + 13{,}8(y - 0{,}0330x)^2;$$

hier verschwindet der zweite Ausdruck, der „zusätzliche", von der Umdrehungszahl abhängige Verlust für

$$y = 0{,}0330\,x,$$

einen Wert, der *mit den obenstehenden gut übereinstimmt;* er wäre dem ersten gleich, wenn y_{max}, also der Punkt der größten Schluckfähigkeit, mit dem des besten Wirkungsgrades übereinstimmte.

Eine Trennung der beiden Verluste, die einmal durch scharfe Richtungsänderung im Eintritt und andererseits durch die Abweichung vom normalen Austritt bedingt werden, ist auf Grund der Gleichung für η nicht gut möglich, da die beiden in Betracht kommenden Stellen: $y = 0{,}0307x$ und $y = 0{,}0337x$ zu nahe beieinander liegen. Es erscheint jedoch gerechtfertigt, anzunehmen, daß der zusätzliche Austrittsverlust, der durch Abweichung vom normalen Austritt entsteht, gleich ist dem *ganzen* Zuwachs an lebendiger Kraft, den das Wasser infolge Tangentialgeschwindigkeit beim Verlassen des Laufrades erfährt; denn im Saugrohr wird sich wesentlich eine stationäre symmetrische Strömung einstellen, bei der $c_u r$ für jedes Flüssigkeitsteilchen konstant bleibt, und da r sich nur unbedeutend ändert, bleibt auch c_u annähernd konstant. Nun gibt Prášil den „wirksamen" Austrittsradius zu 0,323 m an, als einen Mittelwert, der dem über die ganze Austrittsfläche erstreckten Integral

$$\omega \int v_2 r\, do$$

entspricht; da bei Berechnung der lebendigen Kraft das Integral

$$\omega^2 \int v_2 r^2 do$$

zugrunde zu legen ist, in dem die Teile mit größerem r stärker hervortreten, ist der für uns in Betracht kommende Mittelwert von r jedenfalls ein größerer. Setzt man die Erhöhung zu 10%, also den mittleren Austrittsradius zu 0,355 an, so ergibt sich (wenn wir jetzt alle oben genannten Zahlwerte gleich rd. 0,033 ansehen) für den zusätzlichen Austrittsverlust

$$\frac{1}{2g}(0{,}355\,x - \frac{0{,}355}{0{,}033}\,y)^2 = 5{,}9(y - 0{,}033\,x)^2,$$

und es bleibt für den Stoßverlust

$$7{,}9(y - 0{,}033\,x)^2.$$

Da der Austrittsradius des Leitrades 0,433 m beträgt, ist der letztere Ausdruck gleichzusetzen

$$\frac{\alpha}{2g}(0{,}433\,x - \frac{0{,}433}{0{,}033}\,y)^2 = 8{,}78\,\alpha(y - 0{,}033\,x)^2,$$

so daß der „Stoßkoeffizient" $\alpha = 0{,}9$ wird, was mit anderweitigen Erfahrungsergebnissen gut übereinstimmt.

Prášil, der seine Versuchsresultate für variable Umlaufzahl bei konstanter Wassermenge diskutiert, wendet zur Bestimmung des zusätzlichen Austrittsverlustes eine Überlegung an, in der ich ihm nicht folgen kann; er gelangt damit auch zu einer andern Schätzung der beiden Verluste: der Koeffizient α ergibt sich zu etwa 0,7. Eine sichere Grundlage zur Entscheidung dieser Fragen würden Experimente bieten, bei denen der Druck an einigen Punkten des Laufradaustrittes gemessen würde; die vorhandene Lehrbuchliteratur wird der Aufgabe, die sicher nicht ohne praktische Bedeutung ist, nicht gerecht.

Zu einer näheren Untersuchung des ersten Verlustgliedes $2{,}3\,y^2$ fehlen die notwendigen Angaben über die Abmessungen der Wasserführung.

5. Die von Biel[1]) an *Kreiselpumpen* vorgenommenen Versuche führen im wesentlichen zu denselben Ergebnissen wie die Turbinenversuche von Prášil. Die Hauptcharakteristik besteht hier aus einem *Hyperbelast*, der unmittelbar zur Anschauung bringt, daß eine Kreiselpumpe für jeden Wert von H eine minimale, von null verschiedene Umlaufzahl besitzt.

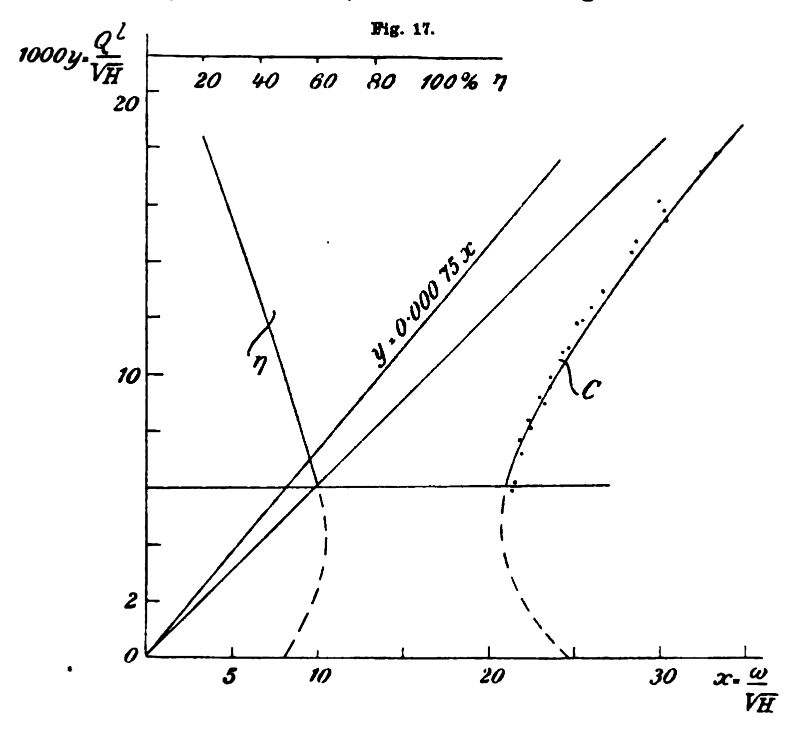
---

1) Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren, Mitteil. u. Forschungsarb., hrsg. vom Ver. deutscher Ing., Heft 42, Berlin 1907.



In Fig. 17 sind die Wertepaare x, y eingetragen, die den Bielschen Zahlentafeln für die oben bereits betrachtete Versuchspumpe entnommen wurden; man erkennt, daß die überwiegende Mehrzahl der

Fig. 17.



Punkte sich bis etwa $y = 0{,}006$ hinunter deutlich in einen Kurvenzug einordnen, und daß dieser durch die eingezeichnete Hyperbel C

$$0{,}00155x^2 + 6{,}5xy - 14000y^2 = 1$$

gut angenähert wird.

Das vom Rade an das Wasser zu übertragende Drehmoment hat, entsprechend unseren Ausführungen in § 11, 5, den Wert

$$M = \gamma Q(0{,}00334\omega + 1{,}74 Q);$$

daher ist der Wirkungsgrad gegeben durch

$$\frac{1}{\eta} = \frac{M\omega}{\gamma Q H} = 0{,}00334x^2 + 1{,}74xy.$$

Die Verluste bestimmt man aus

$$\frac{U}{\gamma Q H} = \frac{1}{\eta} - 1 = 0{,}00179x^2 - 4{,}76xy + 14000y^2;$$

hier liefert die Zerlegung in ein Glied mit y^2 und ein vollständiges Quadrat:

$$\frac{U}{\gamma Q H} = 10820y^2 + (0{,}0422x - 56{,}3y)^2 = 10820y^2 + \frac{1{,}07}{2g}\left(0{,}181x - \frac{0{,}181}{0{,}00075}y\right)^2.$$

Das Zusatzglied verschwindet für

$$y = 0{,}00075\,x\,,$$

während die Zahlenangaben von Biel und die von ihm gebrachte Skizze des Schaufelplanes als Bedingung stoßfreien Überganges vom Laufrad ins Leitrad

$$y \sim 0{,}000725\,x$$

ergeben. Man kann somit unsere Auffassung, daß die Änderung der Widerstände mit der Umlaufzahl hier lediglich durch die Vorgänge im Spalt herbeigeführt wird, im großen und ganzen bestätigt sehen, zumal der Koeffizient α mit 1,07 einen plausiblen Wert erreicht; er ist größer als im vorbetrachteten Fall, weil die engeren Querschnittsabmessungen *schärfere* Richtungsänderung bedingen.

Es erreicht η sein Maximum, wenn $x = 20{,}9$, $y = 0{,}00\,403$ wird, also an einer Stelle, für welche unsere Betrachtung nicht mehr genau gilt, und wird hier gleich 62%. Für $y = 0{,}006$ beträgt der Wirkungsgrad nur mehr 59,2%; er ließe sich auf 72% steigern, wenn die Leitschaufeln so gebaut wären, daß sie an der jetzt betrachteten Stelle „stoßfreien" Übergang des Wassers vom Laufrad gestatteten, statt an der überhaupt nicht erreichbaren, für die $y = 0{,}000725\,x$ ist.

Für die Beurteilung der Maschine kommt in erster Linie der Wirkungsgrad bei *günstigster* Umlaufzahl und Liefermenge in Betracht, und da wird man von einer sachgemäß konstruierten Pumpe voraussetzen dürfen, daß die Übergangsbedingungen erfüllt sind. (Wünschenswert erscheint es auch, beim Laufrad-*Eintritt* zu berücksichtigen, daß $c_u^{(1)} = 0$ ist. Vgl. § 13, 4.) Wenn trotzdem der Nutzeffekt der meisten Kreiselpumpen hinter dem guter Turbinen bedeutend zurückbleibt, so hat das seinen Grund darin, daß die Zellen der Räder bei den meisten gebräuchlichen Ausführungsformen hier weit enger, stärker gekrümmt und viel länger sind als etwa bei Francis-Turbinen; dazu kommt noch, daß das Wasser meist mit großer Absolutgeschwindigkeit den Schaufelraum verläßt (sei es, daß ein Leitapparat vorgesehen ist oder nicht) und sich hierauf die Druckzunahme auf Kosten der Geschwindigkeit in ungeregelter und daher unrationeller Weise vollzieht. Die Entwicklung des Pumpenbaues in der jüngsten Zeit zeigt wohl auch die Tendenz, einerseits den Konstruktionsformen der Turbinen näher zu kommen und andrerseits die Umwandlung der kinetischen Energie in Druck möglichst in den entsprechend konstruierten Leitapparat zu verlegen. Die bedeutende Länge der Kanäle, die bei mehrstufigen Pumpen durch die verwickelte Überführung des Wassers aus einem Rad in das nächste bedingt wird, ließe sich wohl vermindern, indem

man die aufeinanderfolgenden Laufräder abwechselnd außen und innen beaufschlagt, wobei freilich das zentripetale Rad nur geringere Leistung aufweisen wird als das zentrifugale.

Die vorstehenden Rechnungen lassen sich auf das Gebiet sehr kleiner Q nicht ausdehnen, (s. die gestrichelte Fortsetzung des Hyperbelastes in der Fig. 17), da hier das von uns vernachlässigte $M^{(P)}$ ausschlaggebend wird. Insbesondere müssen alle Bemühungen, die Umlaufszahl dez „Schwebezustandes" ($Q = 0$) zu bestimmen, fehlschlagen, die nicht davon ausgehen, $M^{(P)}$ als Funktion von ω und H bei $Q = 0$ zu ermitteln. Andrerseits erscheint es unzulässig den aus derartigen Versuchen entnommenen Wert für die „Radseitenreibung" $\omega M^{(P)}$ als Verlustglied in die Gleichung für den Betriebszustand einzuführen. — Man wird wohl ein Hemmnis für die Fortentwicklung des Pumpenbaues darin erblicken müssen, daß in einem großen Teil selbst der neuesten Literatur über das Wesen und die Wirkungsweise der Kreiselpumpen noch vielfache Unklarheit herrscht.

IV. Abschnitt. Die Strömung im Kreiselrade und die Schaufelformen.

§ 13. Standpunkt der Stromfadentheorie.

1. Die Stromfadentheorie, die heute fast das ganze Gebiet der angewandten Hydromechanik beherrscht, läßt sich, wie in § 4 gezeigt, als eindimensionales Analagon der zweidimensionalen Stromschichtentheorie auffassen: Es wird eine doppelt unendliche Schar von Stromflächen von vornherein als gegeben vorausgesetzt, und zur Bestimmung der Bewegung reichen *zwei* Gleichungen hin, die Kontinuitätsgleichung

$$cf = q$$

und die Bewegungsgleichung für die einzige reaktionsfreie Richtung, die von c aus (16):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{1}{g}T = 0.$$

Über die Veränderlichkeit des T mit c, p usw. läßt sich von vornherein nichts aussagen, da diese jedenfalls davon abhängt, in welcher Weise die Voraussetzungen der Stromfadentheorie im gegebenen Fall annähernd verwirklicht werden (vgl. § 4, 1a). Ist die Bewegung stationär, so hat man auf jedem Stromfaden

$$gH - \int T\,ds = \text{konst.},$$

und man pflegt den Wert des Integrals hierin unmittelbar als Energieverlust anzusprechen; nach unseren Ausführungen ist dies nur dann

zulässig, wenn man mit dem Ansatz den *ganzen* Querschnitt einer Strömung umfaßt, die von festen Wänden oder freien Oberflächen begrenzt wird, und ein dem Querschnitt gegenüber hinreichend *langes* Stück Strömung betrachtet.

Die in der Turbinentheorie auftretenden Stromfadengleichungen sind — ohne Berücksichtigung der Reibung — schon von Euler[1]) in seinen klassischen Arbeiten gegeben worden. Ersetzt man in unseren Gleichung (76) und (78) die Integrale durch Mittelwerte, die je über den ganzen Querschnitt einer Zelle genommen sind, so erhält man bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung:

$$(76') \quad J\frac{d\omega}{dt} = \mu Q (r c_u)_{(2)}^{(1)} - \mu \frac{d\omega}{dt}\int r^2 f\, ds' - \mu \frac{dQ}{dt}\int r \cos\tau\, ds' + M^{(F)} + M^{(G)} + M,$$

$$(78') \qquad \gamma Q H = \mu Q (u c_u)_{(2)}^{(1)} + \omega M^{(G)} + U + \omega M^{(F)} + L'.$$

Hier bedeutet Q die gesamte Wassermenge, U den totalen Energieverlust usw.; f die Summe der senkrecht zur Kanalrichtung ds gemessenen Querschnitte, τ den Winkel zwischen ds und dem Radius r. Die Gleichungen sind natürlich grundsätzlich jenen analog, zu denen die Hypothese der Konstanz der Stromlinien geführt hat; ein Unterschied in der Anwendung besteht insofern, als man in der eigentlichen Stromfadentheorie *Querschnitt und Richtung der einzelnen Fäden unmittelbar den gegebenen Abmessungen der Turbinenkanäle entnimmt*, während wir uns vorbehalten müssen, die Verteilung der Relativgeschwindigkeiten im Rade erst noch mit Hilfe der hydrodynamischen Grundgleichungen auszumitteln. Nur soweit es sich um die Abschätzung der *Energieverluste* im Rade handelt (§ 12), sind wir der ganzen Sachlage nach genötigt, uns auf die Vorstellungen der Stromfadentheorie zu stützen.

2. *Die übliche Darstellung der Turbinentheorie* geht von der oben (§ 12, 2) bereits gestreiften Bedingung des „stoßfreien Überganges" vom Leitrad ins Laufrad aus. Es seien α, β, γ die Winkel, die die Richtung von u mit der des Leitschaufelendes, bzw. mit der mittleren Ein- und Austrittsrichtung der Laufradschaufel bilden. Dann gilt für stoßfreien Gang

$$(a) \qquad u_1 = c_1 \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta}.$$

Ferner hat man, wie aus (80a) hervorgeht, unter der Voraussetzung, daß die absolute Austrittsgeschwindigkeit zu u_2 senkrecht steht, daß also

$$(b) \qquad v_2 \cos\gamma = u_2$$

1) Vgl. insbesondere: Théorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. Hist. de l'Acad. roy. d. sc. 1754. Berlin 1756, S. 227.



ist, bei Verschwinden von $M^{(G)}$ und Vernachlässigung von $M^{(P)}$

(c) $$g\eta H = c_1 u_1 \cos\alpha .$$

Aus (a) und (c) folgt

(d) $$u_1 = \sqrt{\eta}\sqrt{gH\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}}, \quad c_1 = \sqrt{\eta}\sqrt{gH\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha}}.$$

Die *Kontinuitätsgleichung* gibt, unter der Annahme, daß im Spalt zwischen den Rädern die volle Mantelfläche als Durchflußquerschnitt in Betracht kommt und die axiale Dimension der Zellen konstant ist:

(e) $$c_1 \sin\alpha = v_1 \sin\beta = \frac{r_2}{r_1} v_2 \sin\gamma = c_2 \frac{r_2}{r_1}.$$

Als *„Eulersche Gleichung"* schlechthin bezeichnet man die Spezialisierung von (76') für stationären Betriebszustand:

(f) $$M = \mu Q (r c_u)_{(2)}^{(1)}.$$

Zeuner[1]) hat die sog. *„Berücksichtigung der Schaufelstärke"* eingeführt, der zufolge anstelle von (e) die Gleichungen treten:

(e') $$c_1 \sin\alpha \frac{a_0}{a_0+s_0} = v_1 \sin\beta \frac{a_1}{a_1+s_1} = \frac{r_2}{r_1} v_2 \sin\gamma \frac{a_2}{a_2+s_2} = \frac{r_2}{r_1} c_2,$$

in der die a bzw. die s die in der Richtung von u gemessenen Kanalweiten bzw. Schaufelstärken bezeichnen; die Verallgemeinerung der Überlegungen für variable Axialdimensionen, für Abweichung vom normalen Austritt usf. liegt auf der Hand.

Aus der Betrachtung der Relativ-Bewegung im Laufrade, die stillschweigend als stationär vorausgesetzt wird, ergibt sich, entsprechend (70):

(g) $$\left(\frac{v^2-u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h\right)_{(2)}^{(1)} = R_1,$$

wenn R_1 die durch Reibung *innerhalb* des Laufrades bedingte Verminderung der Strömungsenergie bedeutet; ebenso, wenn mit R_0 bzw. R_2 die Verluste auf dem Wege vom Oberwasserspiegel A bis zum Laufradeintritt 1, bzw. vom Laufradaustritt 2 bis zum Unterwasserspiegel B bezeichnet werden, unter der Annahme, daß hier die *absolute* Bewegung stationär ist:

$$H_A - \left(\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h\right)_1 = R_0, \quad \left(\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h\right)_2 - H_B = R_2;$$

schließlich durch Addition der drei letzten Beziehungen, die sog. *Ludewigsche Gleichung:*[2])

(h) $$H_A - H_B - (R_0 + R_1 + R_2) \equiv (1-\eta) H = \left(\frac{c^2+u^2-v^2}{2g}\right)_{(2)}^{(1)},$$

---

1) Zeuner, Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Leipzig 1899.

2) Ludewig, Allgemeine Theorie der Turbinen. Berlin 1890.

die auch unmittelbar durch eine trigonometrische Umformung aus (c) hervorgeht. Bei der Berechnung der Turbinen wird auch häufig der „Reaktionsgrad“ in den Vordergrund gestellt, d. i. das Verhältnis

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma H},$$

das bei Druckturbinen verschwindet und bei den Überdruckturbinen gebräuchlicher Bauart etwa bis 0,7 reicht.

Die Diskussion der vorstehenden Gleichungen, die Wahl der verfügbaren Winkel und Querschnittsverhältnisse mit Rücksicht auf die Herstellung des Rades, ausreichende Führung des Wasserstrahles, günstige Umlaufszahl, Verminderung der Reibungs- und Austrittsverluste, des schädlichen Wasseraustrittes aus dem Spalt usw., bildet den vorwiegenden Inhalt der elementaren Lehrbücher.[1] Die sog. *„graphische Turbinentheorie“* stellt diese Beziehungen in Diagrammen dar, die teils aus Geschwindigkeitsdreiecken mit den Schaufelwinkeln, teils aus rechtwinkligen Dreiecken zur Bildung der Quadratsummen usw. bestehen.[2]

3. Die für stoßfreien Gang und normalen Wasseraustritt gültigen Gleichungen (d) bis (f) gestatten eine einfache Diskussion der *verschiedenen Betriebsverhältnissen angepaßten Radtypen.* Zunächst erkennt man, daß dieselbe Turbine brauchbar bleibt, wenn der Wert von $k = \frac{Q}{\sqrt{H}}$ konstant erhalten wird; die Umlaufszahl ändert sich dabei proportional mit $\sqrt{H}$, die Leistung — unveränderlichen Wirkungsgrad vorausgesetzt — mit $\sqrt{H^3}$. Verschieden großen, untereinander ähnlichen Ausführungen entsprechen k-Werte, die sich wie die Quadrate der Lineardimensionen verhalten. Die Verhältnisse von c_1, v_1, v_2, c_2, u_1, u_2 zu $\sqrt{H}$ hängen lediglich von den Schaufel*winkeln* ab, sind daher für jedes einzelne Rad in einer Reihe *ähnlicher* Räder gleich.

Bei den Francis-Turbinen gebräuchlicher Ausführung schwankt das Verhältnis:

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2gH}}$$

etwa zwischen 0,48 (Turbine des Karbidwerkes in Jaice, Bosnien) und 0,82. Der Koeffizient der mittleren Austrittsgeschwindigkeit, die der Saugrohrgeschwindigkeit gleichgesetzt wird,

$$\varphi_2 = \frac{c_2}{\sqrt{2gH}},$$

---

1) Die erste ausführliche und sachgemäße Darstellung dürfte die von Bach sein: Die Wasserräder. Stuttgart 1868.

2) Herrmann, Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen, 2. Aufl., Berlin 1900. — Camerer, Neue Diagramme zur Turbinentheorie, Berlin 1902.

beträgt bei der Turbine in Jaice 0,13, bei den „Trump“-Turbinen etwa 0,28. Das Verhältnis

$$k = \frac{r_s}{r_1}$$

des Eintrittsradius zum Halbmesser des Saugrohres erreicht bei der Jaice-Turbine den Wert 2,2 und kann unter üblichen Verhältnissen auf 0,7 sinken. Es folgt nun aus

$$r_s^2 \pi \varphi_2 \sqrt{2gH} = Q, \quad u_1 = \frac{r_1 \pi n}{30}$$

die Umlaufzahl zu

$$n = 16{,}9 \frac{\varphi_1 \sqrt{\varphi_2}}{k} \sqrt{\frac{\sqrt{2gH^3}}{Q}} \equiv \psi \sqrt{\frac{\sqrt{2gH^3}}{Q}},$$

so daß $\psi = 1{,}3 \sim 9{,}6$ wird[1]); diese beiden Zahlen geben ungefähr die Grenzen an, innerhalb deren bei gegebener Wassermenge und gegebenem Gefälle die Umlaufzahl der Francis-Turbine gewählt werden kann. Anstelle von ψ pflegt man die „spezifische Umlaufzahl“[2]) n_s, d. i. den Wert von n für $H = N = 1$ einzuführen, wobei N die in PS gemessene Leistung der Turbine, also bei Annahme von $\eta = 0{,}75$ den Betrag $10\,QH$ bezeichnet; man findet $n_s = 29{,}8\,\psi = 40 \sim 285$.

Baashus[2]) hat nun die Bemerkung gemacht, daß der Wirkungsgrad von Rädern eines bestimmten Systems, etwa von Francis-Turbinen, *sich annähernd als Funktion von ψ bzw. n_s darstellen läßt.* Soweit diese Auffassung durch die Erfahrungsergebnisse gedeckt ist, gibt sie einen sehr brauchbaren Anhaltspunkt für die Wahl der Radtypen in gegebenen Fällen der Praxis; auf die Untersuchung von Kreiselpumpen übertragen, würde sie namentlich die hier wesentliche Frage nach der Aufteilung des Gefälles auf mehrere Stufen übersichtlich zu behandeln gestatten.

4. Für den Fall, daß die Umlaufzahl der Turbine *von der des „stoßfreien“ Ganges abweicht,* zeigen sich Verschiedenheiten in der Auffassung der Gleichungen (c) und (f). Zeuner — und ihm folgt ein großer Teil der Autoren — setzt in (f) für $c_u^{(1)}$ die Summe aus u_1 und $v_u^{(1)}$, welch letzteres dem Anfangsquerschnitt des Laufrades entnommen wird, und sucht die „Stoßwirkung“ daneben explizit zu berücksichtigen. Dagegen gelangt Brauer[3]) zu dem richtigen Ergebnis, das insbesondere Prášil[4])

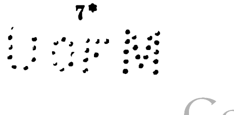
1) Über die Werte der Koeffizienten vgl. auch Wagenbach, Neuere Turbinenanlagen, Berlin 1905.

2) Baashus, Die Klassifikation von Turbinen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1905 (S.-A.).

3) Grundriß der Turbinentheorie, Leipzig 1899.

4) s. Fußnote S. 82.

7*



in korrekter Weise abgeleitet und durch seine Versuche gestützt hat: *Es ist der Wert für* $c_u^{(1)}$ *dem Endquerschnitt des Leitkanals zu entnehmen und die Gleichung (f) im übrigen unverändert zu lassen; der Einfluß der Abweichung* Δu *äußert sich lediglich in einer Verminderung des Wirkungsgrades. Dagegen hat man für* $c_u^{(2)}$, *(soweit es nicht überhaupt null ist), die Summe* $v_u^{(2)} + u_2$ *einzusetzen.*

Auf die Verhältnisse bei Kreiselpumpen hat v. Grünebaum[1]) die Zeunersche Auffassung übertragen. Für die übliche Bauart von Pumpen ohne Zuführungsschaufeln und mit Leitapparat im Austritt aus dem Laufrad (vgl. Fig. 14) ergibt sich gegenüber dieser und anderen Darstellungen, wie etwa der oben erwähnten von Biel, als ein durch Experiment und Theorie gesichertes Resultat: *Soweit die Anschauungen der Stromfadentheorie überhaupt anwendbar bleiben (also für nicht zu kleine Q), ist hier* $c_u^{(1)}$ *in Gleichung (f) gleich null zu setzen,* $c_u^{(2)}$ *als Summe aus* $v_u^{(2)}$ *und* u_2 *zu bestimmen; durch unrichtige Stellung der Leitschaufeln wird nur eine Erhöhung der Reibungsverluste herbeigeführt.*

5. Die Frage der *Gestaltung der Lauf- und Leitradschaufeln* bleibt vom Standpunkt der Stromfadentheorie aus noch völlig offen; in den Gleichungen treten nur die Winkel der Schaufelenden auf und nur diese erscheinen für den ganzen Bewegungsvorgang bestimmend.

Einen Gesichtspunkt für die Konstruktion der *Austrittsenden* der Schaufeln, der jedoch häufig übertrieben wird, gibt die Forderung, daß der Strahl möglichst ohne Kontraktion austreten soll. Zeuner schlägt daher vor, die Enden der zylindrischen Schaufeln von Radialrädern im Normalschnitt nach *Kreisevolventen* zu formen, die von Axialrädern im Schnitt mit den Zylinderflächen *geradlinig* zu gestalten. Damit soll erreicht werden, daß der Strahl wenigstens im letzten Stück vor dem Austritt konstanten Querschnitt besitzt. Die Anschauungen, die dieser Vorschrift zugrunde liegen, sind jedenfalls nur in sehr geringem Maße zutreffend.

Den *Anfang der Laufradschaufel* empfiehlt Brauer[2]) so zu formen, daß hier $\frac{\partial (c_u r)}{\partial s}$ verschwindet. Damit werden die Druckschwankungen längs eines Parallelkreises vermieden, die seiner Ansicht nach zu Übergangsverlusten Anlaß geben.

Von diesen beiden Punkten abgesehen, enthält die ältere Literatur der Turbinentheorie nur Angaben allgemeiner Art, wie: gleichmäßigen und allmählichen Übergang der Richtung vom Eintritts- zum Austritts-

1) Die Theorie der Zentrifugalpumpen, Berlin 1905.

2) A. a. O. S. 34.



winkel, allmähliche Änderung der Querschnittsdimensionen und möglichst geringe Länge des Kanals.

6. Die Entwicklung des Turbinenbaues, die von den einfachen älteren Typen der rein axialen oder rein radialen Räder zur Vorherrschaft der verwickelter gestalteten Francis- und Löffelturbine geführt hat und gleichzeitig das Bedürfnis nach genaueren Berechnungsmethoden entstehen ließ, hat die *Unzulänglichkeit der Stromfadentheorie* schon seit langem fühlbar gemacht. Es besteht kein Zweifel, daß sich derzeit auch der Bau der Kreiselpumpen in ähnlicher Weise fortbildet.

Eine Reihe verschiedener „Theorien", die in den letzten zehn Jahren veröffentlicht wurden, und denen allen derselbe Gedanke zugrunde liegt, suchen dem praktischen Bedürfnis abzuhelfen. Man zerlegt den Schaufelraum des Laufrades durch eine Anzahl von Drehungsflächen in sog. *Teilturbinen*, die je einem bestimmten Teile von Q entsprechen, und wendet auf jede solche die Stromfadengleichungen an. Tatsächlich bedeutet das nichts anderes, als daß der Verlauf der Stromlinien in einem Meridianschnitt — er wird als in jedem Schnitt *gleich* vorausgesetzt — willkürlich angenommen wird, während er durch die äußere Begrenzung, die Schaufelform usw. schon bestimmt ist.

Die Angaben, auf Grund deren die „Konstruktion" der Teilturbinenprofile erfolgt, sind nicht immer dieselben. Speidel nnd Wagenbach[1]) scheinen von der Ansicht auszugehen, daß die Geschwindigkeit auf einer Orthogonaltrajektorie der Stromlinien, die sie „Niveaulinie" nennen, konstant sei; Baashus[2]) hält dies für eine Näherung und benützt den richtigen Gedanken, daß die gesuchten Stromlinien einen allmählichen Übergang von der gleichförmigen Geschwindigkeitsverteilung im Laufradeintritt zu der bekannten Eigenströmung im Saugrohr darstellen, den er nach Gefühl einzeichnet. Ähnlich verfahren die Lehrbücher von Pfarr, Thomann u. a. sowie eine neuere Arbeit von Kaplan.[3])

Der Zweck dieser Ausmittlung von „Teilprofilen" besteht darin, daß man bei bekannter Meridiankomponente der Geschwindigkeit dem Schaufelende leicht die Richtung geben kann, die an jeder Stelle der Bedingung des *normalen Austrittes* entspricht. Überdies wird allgemein die namentlich durch Escher[4]) ausgebildete Vorschrift beobachtet, die den Zeunerschen Gedanken der Evolventen-Konstruktion zur Vermeidung der Kontraktion verallgemeinert: Es soll das Endstück der Strom-

1) Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., 1899, S. 581.

2) Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., 1901, S. 1602.

3) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1907, Heft 1 u. ff.

4) Die Schaufelung der Francis-Turbinen, 2. Aufl. Zürich, S. A. Schweizer Bauztg. Bd. 45.



linie, wenn es mit der ihre Drehungsfläche berührenden Kegelfläche in die Ebene abgewickelt wird, eine Kreisvolvente bilden. Manche Autoren glauben auch, daß sie mit der Konstruktion der Teilturbinen es noch in der Hand haben, etwa die Größe der Austrittsgeschwindigkeit auf der ganzen Schaufelendkante konstant zu erhalten oder eine ähnliche Bedingung zu erfüllen.

Um den noch willkürlich gelassenen Übergang der Stromlinienrichtung auf der Drehungsfläche von der Richtung des Eintrittes bis zu der des Austrittes *besser übersehen* zu können, schlägt Kaplan[1]) eine ebene Abbildung der Drehungsfläche vor. Prášil[2]) hat dann gezeigt, wie man die bekannte *konforme* Abbildung einer Drehungsfläche auf einen Kreisring in eleganter Weise zur Behandlung der Aufgabe heranziehen kann.

§ 14. Rationelle Ermittelung der Stromlinien.

1. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall der vollbeaufschlagten Überdruckräder, zu denen wir auch die Grenzräder (§ 11, 1) hinzuzählen wollen, und umfassen damit die vorherrschenden Bauarten: Francis- und Löffelturbine, sowie die Kreiselpumpen. In Fig. 18 sind im Maßstab 1:5[3]) die Kranzprofile des Lauf- und Leitrades einer Turbine wiedergegeben[4]), die bei einem Gefälle $H = 1{,}0\ m$ mit 71 Umläufen in der Minute arbeitet und dabei eine Wassermenge $Q = 1{,}09\ m^3$ sec verbraucht. Wir stellen uns die Aufgabe, den *Verlauf der Strömung im Schaufelraume während des konstanten Betriebszustandes zu ermitteln und darnach die Austrittskante, entsprechend der Bedingung normalen Austrittes, zu bestimmen.*

Die Gestalt der Laufradschaufel ist durch die sieben Meridianschnitte 0 bis 6 gegeben, von denen 1 bis 6 je einem konstanten Winkelintervall $\Delta f = 0{,}124$ entsprechen, während zwischen 1 und der Eintrittskante O der *halbe* Winkel liegt; überdies haben wir die mit 1′, 1″ und 2′ bezeichneten Schnitte interpoliert, derart, daß von 1′ bis 1″ $^1/_8$, von 1″ bis 1 $^1/_4$ und von 2 bis 2′ $^1/_2$ von jenem Werte reicht. Von der Zuführungsschaufel setzen wir nur voraus, daß sie der Hauptsache nach zylindrisch ist, mit Erzeugenden parallel zur Achse. An das Laufrad schließt ein Saugrohr an, dessen Profil die Figur noch wiedergibt, soweit es für die zu untersuchende Strömung in Betracht kommt. Ohne einen bedeutenden Fehler zu befürchten, ersetzen wir die gegebenen Konturen an der Stelle, wo die Radnabe aufhört, und dort wo

1) Zeitschrift f. d. ges. Turbinenwesen, 1905, H. 8. u. 9.

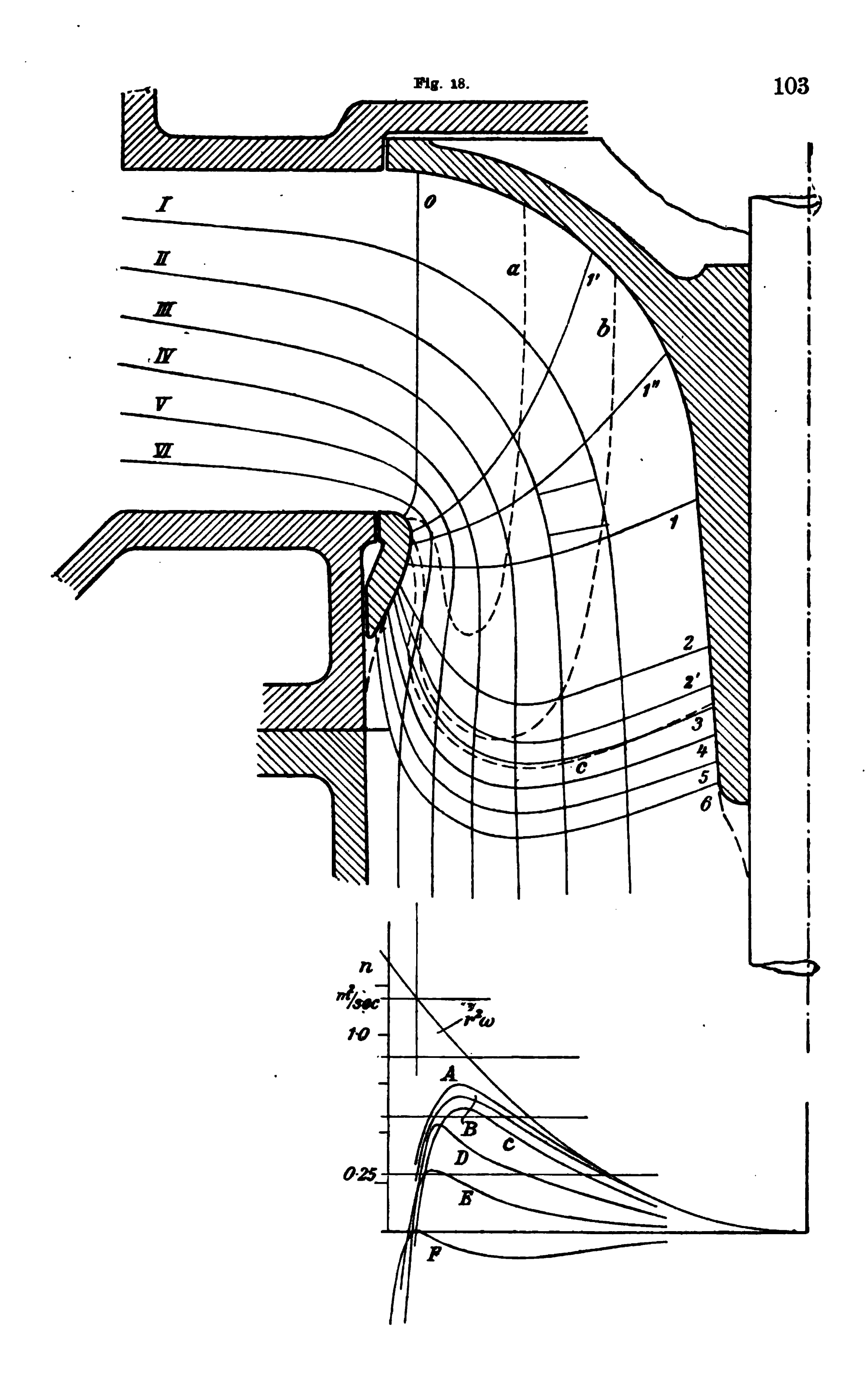
2) In der zweiten der S. 29 zitierten Arbeiten, S. 4.

3) Die Originalfiguren wurden für den Druck noch um etwa ein Viertel ihrer Größe verkleinert.

4) Nach Thomann, Die Wasserturbinen, Stuttgart 1908. Tf. III. Fig. 2.



Fig. 18.



der äußere Radkranz an das Saugrohr anschließt, durch die gestrichelten Übergangslinien; es ist anzunehmen, daß in derartigen Ecken sich jedesmal eine kleine Wassermenge anstaut, und auf diese Weise der abgerundete Übergang von selbst entsteht.

Die Bedingung stoßfreien Eintrittes, oder was dasselbe ist, des stetigen Überganges der mittleren Geschwindigkeitsrichtung vom Leitrad ins Laufrad setzen wir als durch die Formung der Leitschaufel-Austrittskante erfüllt voraus. Mit Rücksicht auf die erfahrungsmäßig festgestellte annähernde Konstanz der Stromlinien bei verschiedenem Q und ω ist jedoch diese Einschränkung für die Gültigkeit des im Folgenden dargelegten Verfahrens nicht wesentlich. Wir werden als Ergebnis unserer Untersuchung neben der Festlegung der richtigen Laufrad-Austrittskante auch noch eine *rationelle Bestimmung der Leitschaufel-Endwinkel für die verschiedenen Punkte der Eintrittslinie vom Gesichtspunkte des stoßfreien Überganges aus erhalten.*

2. Aus den Erörterungen des zweiten Abschnittes geht hervor, daß die Strömung im Kreiselrade auch während des dauernden Betriebszustandes weder stationär noch in irgend einem Augenblick in allen Meridianschnitten dieselbe sein wird. Wenn wir also nach einem Meridianbild der Stromlinien fragen, so kann es sich nur um ein *Durchschnittsbild* handeln, das — bei der Kleinheit der zeitlichen und örtlichen Schwankungen — eine *Annäherung an jeden der verschiedenen Strömungszustände darstellt.* Vorausgesetzt ist dabei, daß das äußere auf das Rad wirkende Kraftmoment M und alle außerhalb des Rades liegenden Bestimmungsstücke der Bewegung von t unabhängig, daß ferner wenigstens in unmittelbarer Umgebung des Schaufelraumes die Zu- und Ablaufverhältnisse an allen Punkten eines Parallelkreises dieselben sind.

Sind die Schaufeln, welche die einzelnen Turbinenkanäle voneinander trennen, dünn gegenüber der Kanalweite, wie es etwa bei den Laufrädern der Francis-Turbinen meist der Fall zu sein pflegt, so kann man die vordere und rückwärtige Schaufelfläche als ungefähr kongruente und um einen konstanten Polarwinkel gegeneinander verdrehte Flächen ansehen. Es folgt aus § 4, daß auch unter dieser Voraussetzung und bei Annahme der günstigsten Zu- und Abflußbedingungen eine axial-symmetrische Strömung im Turbinenkanal im allgemeinen nicht eintreten kann. Um nun eine Annäherung an die aus den wirklichen Randbedingungen folgende Strömung zu erhalten, setzen wir voraus, *die Schaufelflächen seien so dicht gestellt, daß die Gleichungen der stationären Bewegung in symmetrischen Schichten* hier angewendet werden dürfen (vgl. § 4, 1, a). Damit stellen wir uns auch vollkommen auf den Boden der Anschauungen, von denen man bei der Beurteilung der

Strömungsverhältnisse in der Praxis und etwa bei der in § 13, 6 erwähnten Berechnungsweise auszugehen pflegt.

Auf die Vorgänge im Leitkanal läßt sich diese Auffassung wohl nicht unmittelbar übertragen, da die gebräuchlichen (Finkschen) Leitschaufeln stark verschiedene Vorder- und Rückfläche aufweisen; die Schwierigkeit wird jedoch in der Hauptsache dadurch behoben, daß es sich hier um eine Strömung zwischen zwei parallelen zur Achse normalen Ebenen handelt, deren Stromlinien im wesentlichen zur Achse senkrecht verlaufen.

Auf die Berücksichtigung der Reibung längs der *Schaufelflächen* muß bei der Betrachtung von vornherein verzichtet werden; die Schaufelreibung gehört eben zu den Umständen, welche eine Abweichung der Strömung in den einzelnen Schichten von dem Durchschnittsbild hervorrufen. Den Einfluß der Reibung längs der Radkranzprofile kann man jedoch gemäß unserem Vorschlag in § 8, 5 näherungsweise in Rechnung stellen, indem man eine nach den Rändern hin abnehmende Strömungsenergie der Untersuchung zugrunde legt; allein es hat dies nur sehr geringen Einfluß auf das Resultat, da die Geschwindigkeiten im Querschnitt einer geraden Strecke ziemlich gleichförmig sind und nur am Rande stark abfallen. Wir setzen daher im folgenden die Strömung als *wirbelfrei* voraus.

Vollständig bestimmt ist die Wasserbewegung erst, wenn die Zulauf- und Ablaufverhältnisse in ausreichendem Maße bekannt sind. Wir dürfen mit einiger Berechtigung annehmen, daß das Wasser im Saugrohr schließlich in parallelen Fäden und mit gleicher Geschwindigkeit weiterfließt und daß es längs der ganzen Eintrittskante dem Leitrade mit gleicher Geschwindigkeit zuströmt. (Vgl. die Aufstellungen über die „Eigenströmung“ in § 7). Damit sind wir in den Stand gesetzt, Anfangs- und Endpunkte der einzuzeichnenden Stromlinien festzulegen, so daß — in dem einfach zusammenhängenden Bereich — zufolge des Schlußsatzes von § 7, 7 eine Lösung eindeutig bestimmt ist. Die gesuchten Linien selbst müssen die in Gl. (46) enthaltene Bedingung erfüllen:

$$\tau = -\frac{1}{2\sigma'}\frac{\Delta f \cdot \Delta n}{\Delta \psi}, \tag{a}$$

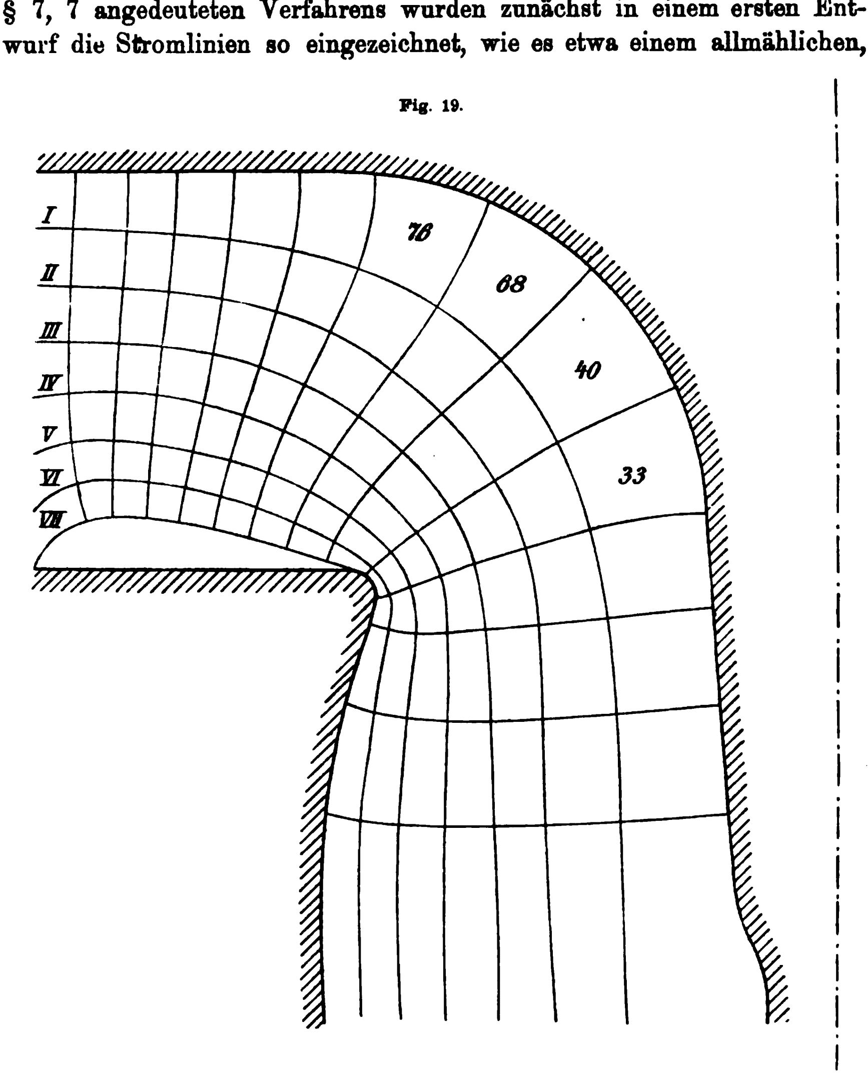
wobei n durch die Gleichung (45) gegeben ist:

$$n = r^2\omega + r\frac{\Delta f \cdot \Delta \psi}{\sigma}. \tag{b}$$

3. Ehe wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zuwenden, den Strömungsverlauf auf Grund der vorstehenden Beziehungen zu ermitteln, wollen wir die *rein meridionale* wirbelfreie Bewegung mit $\tau = 0$ untersuchen,

die innerhalb der gegebenen äußeren Profilbegrenzungen und mit den gegebenen Stromlinien-Endpunkten möglich ist. In Ausführung des in § 7, 7 angedeuteten Verfahrens wurden zunächst in einem ersten Entwurf die Stromlinien so eingezeichnet, wie es etwa einem allmählichen,

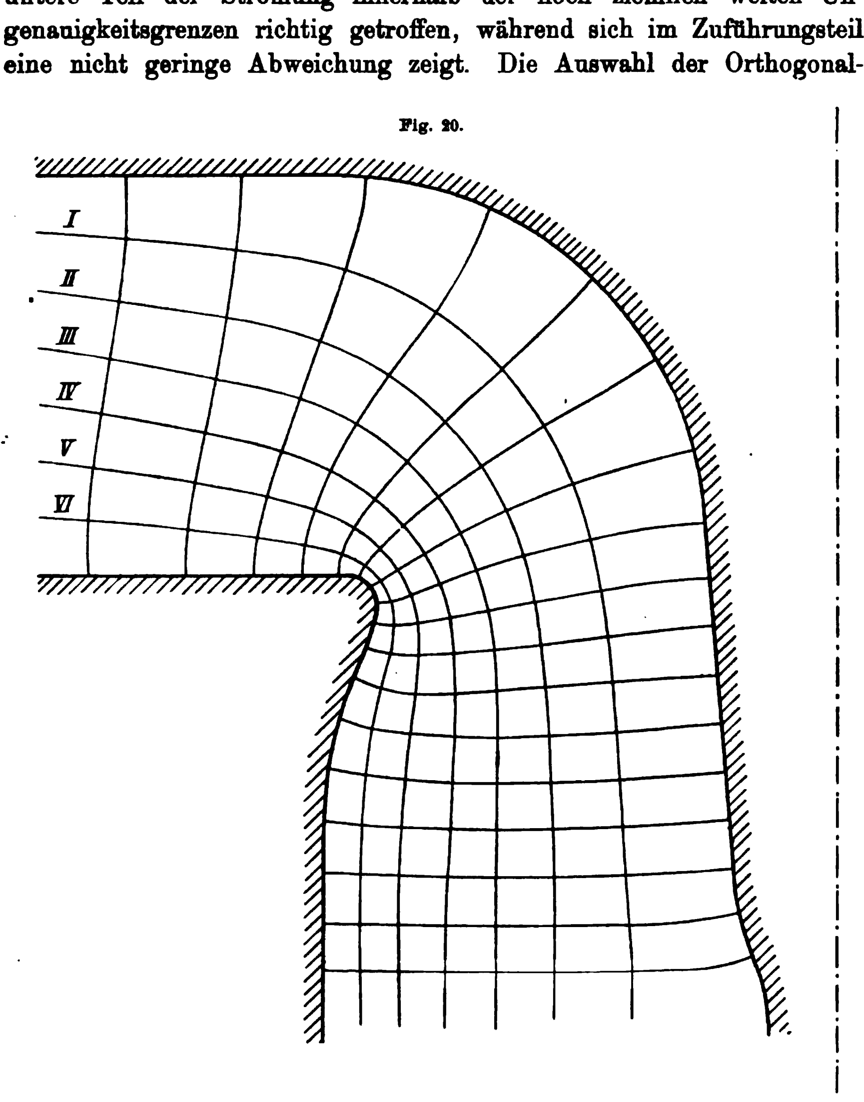
Fig. 19.



gleichmäßig erscheinenden und sonst willkürlichen Übergang zwischen den beiden äußeren Begrenzungen entspricht. Hierauf wurde die dem ersten Teilungspunkte (I) zugehörige Linie mit der benachbarten gegebenen Begrenzung zur Grundlage einer Konstruktion genommen, nach der, ähnlich wie in § 7, 4 beschrieben, die folgenden Stromlinien II bis VII der Reihe nach bestimmt werden konnten. Nachdem der erste Versuch zu einem unbefriedigenden Ergebnis geführt hatte,

ergab ein zweiter das in Fig. 19 dargestellte Strombild. Hier ist der untere Teil der Strömung innerhalb der noch ziemlich weiten Ungenauigkeitsgrenzen richtig getroffen, während sich im Zuführungsteil eine nicht geringe Abweichung zeigt. Die Auswahl der Orthogonal-

Fig. 20.

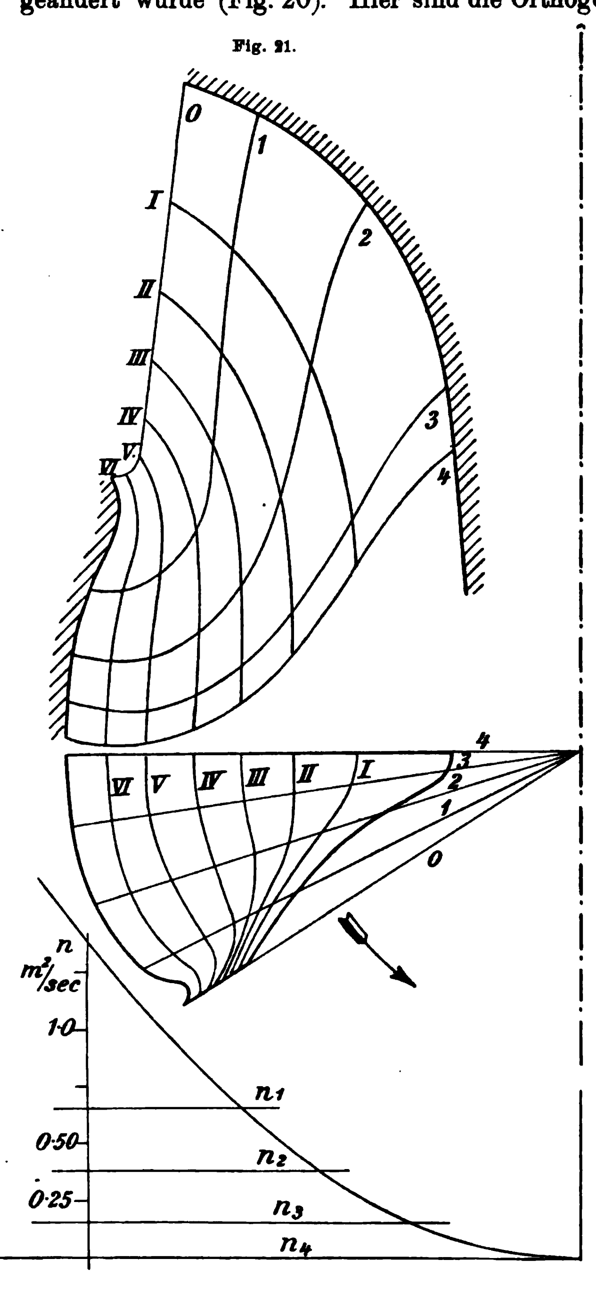


trajektorien war dabei eine willkürliche, wie sie sich gerade beim Entwurf der Zeichnung als günstig ergab; der Wert des längs jeder Trajektorie konstanten Quotienten, der immer auf den *Mittellinien* der Kurvenvierecke gemessen wurde, ist an einigen Stellen in die Zeichnung eingetragen.

Zu einer endgültigen Korrektur des Strombildes führte nunmehr der an soeben angeführter Stelle ausgesprochene Gedanke, wonach die

Stromlinie I nach Maßgabe des voraus gefundenen Fehlerergebnisses abgeändert wurde (Fig. 20). Hier sind die Orthogonallinien so ausgewählt, daß sich überall ein konstanter Wert von 70 mm (im Maßstab der Zeichnung) für den reziproken Wert der „Form" des Strombildes ergibt. Eine Nachprüfung des Resultates in der Art, daß versuchsweise von der Sromlinie VI und der dieser angrenzenden Führungslinie ausgegangen wurde, ließ nur geringfügige Fehler erkennen, denen bei der approximativen Natur des ganzen Verfahrens keine Bedeutung zuzuschreiben ist.

Fig. 21.



3. Wie in § 4, 5 bemerkt wurde, stellt das Strombild einer wirbelfreien meridionalen Bewegung die *Meridian-Projektion einer allgemeinen Strömung* in symmetrischen Schichten dann dar, wenn die Linien konstanter Werte von $n = c_u r$ mit den Meridianschnitten der Schaufelflächen zusammenfallen. Man kann zu einer Stromlinienschar mit $\tau = 0$ *eine* solche Schnittlinie und den funktionalen Zusammenhang zwischen f und n willkürlich wählen; aus Gl. (b), die zu einem angenommenen Wert Δf den von Δn an jeder Stelle der Ausgangslinie liefert,

ist dann eine weitere n-Linie bestimmt usf. Um in unserem Fall einen Überblick über die hier auftretenden Verhältnisse zu gewinnen, haben wir in Fig. 21, in die das früher gefundene Strombild eingetragen wurde, zunächst die Werte von $r^2\omega$ als Funktion von r in einem besonderen Diagramm eingezeichnet. Als Eintrittslinie für das Laufrad und zugleich als erster Meridianschnitt der Schaufelfläche wurde eine schwach gegen die Achse geneigte Gerade angenommen, wie sie bei manchen amerikanischen Ausführungen zu finden ist. Der absolute Wert von $c_u r$ in der Nähe des Eintrittes ist etwas niedriger gewählt als der Anfangswert von $r^2\omega$, so daß der relative Stromweg mit einer der Umlaufrichtung entgegengesetzten u-Komponente beginnt. Die aufeinanderfolgenden Werte von n, die den 4 Mittellinien zwischen den eingezeichneten n-Linien 0 bis 4 entsprechen, sind aus dem Diagramm zu entnehmen. Die zugehörigen Beträge für Δf, von denen der Verlauf der Linien wesentlich abhängt, sind im Bogenmaß: 0,106, 0,153, 0,159 und 0,139. Die letzte n-Linie ergibt, wenn sie passender Weise als Laufrad-Austrittskante benützt wird, normalen Austritt.

Durch die ψ- und n-Linien ist die Gestalt der Schaufelfläche und der Verlauf der absoluten und relativen Stromlinien, von denen die letzteren auch im Grundriß dargestellt wurden, eindeutig festgelegt. Ersichtlich kann man durch Abänderung der Eintrittskante und der Werte für Δf zu den gegebenen Stromlinien eine große Mannigfaltigkeit von Schaufelformen erhalten, für die alle sich die Berechnung etwas einfacher gestaltet, als im allgemeinen, sofort zu behandelnden Falle möglich ist. Bei Rädern mit nicht erweitertem Schaufelraum (Saugrohrdurchmesser kleiner als Eintrittsdurchmesser) gelangt man auf diesem Wege zu Lösungen, die im wesentlichen den gebräuchlichen Konstruktionsformen entsprechen.

5. Will man unmittelbar das Strombild, wie es den *gegebenen Schaufelflächen* entspricht, entwickeln, so hat man ein dem früheren (Abs. 3) völlig analoges, wenn auch etwas weniger einfaches Verfahren zu beobachten. Nachdem einmal eine Stromlinie I versuchsweise angenommen wurde, ist eine weitere II derart einzuzeichnen, daß die Formdifferenz τ beim Übergang von 0 I zu I II der Gl. (a) genügt; die Anfangselemente der n-Linien, die dabei zu benützen sind, findet man aus 0 I II und den vorgeschriebenen f-Linien, mit Hilfe der Gleichung (b). Stimmt die durch fortgesetzte Konstruktion gefundene Endlinie mit der gegebenen zweiten Begrenzung nicht überein, so muß die erste Annahme sinngemäß abgeändert werden.

In unserem Falle erweist es sich als einfacher, von dem bereits ermittelten meridionalen Strombild auszugehen. In dem Diagramm

der Fig. 18 ist in den Kurven A bis F der Verlauf der Werte von n längs der Mittellinien zwischen zwei Schaufelschnitten als Funktion von r eingetragen, so wie er sich aus den früheren ψ-Linien und den vorgeschriebenen f-Linien auf Grund von (b) ergibt; dabei entsprechen der Reihe nach A bis F den Intervallen $1'-1''$, $1''-1$, $1-2$, $2-3$, $2'-3$, $3-4$. Mit Hilfe des Diagramms ließen sich die drei n-Linien a, b, c konstruieren, von denen c zu dem Werte $n=0$ gehört, während die andern mit der Eintrittskante 0 das Intervall von $n=0$ bis $n=r_1^2\omega$ (an der Eintrittslinie) gleichmäßig teilen.

Die Linien 0, a, b, c bestimmen zusammen mit den f-Linien an jeder Stelle einen Wert für σ', und es ergibt sich aus den Festsetzungen in § 5, 6, daß dieser in dem rechten Teil der Figur, etwa bis zur Stromlinie IV *negativ*, in dem linken *positiv* ist. Da ψ von I gegen VI wächst, so folgt damit, daß der Quotient $\frac{ds}{r\,dn}$ von I bis etwa IV zunimmt und von da an wieder sinkt: die Stromlinien drängen sich jetzt gegenüber dem meridionalen Strombild nach der Mitte hin zusammen. Rechnet man für das von a, b, $1''$ und 1 gebildete Viereck den Wert von τ, so hat man:

$$\Delta f = 0{,}031,\ \Delta\psi = 0{,}025,\ \Delta n = 0{,}297,$$
$$r\sigma' = 51.352.125.10^{-9} = 0{,}00224;\ \tau = 164.$$

Wendet man diese Rechnung auf das in der Zeichnung hervorgehobene, zwischen I und II liegende Viereck an, das eine „Form"

$$\vartheta = \frac{8{,}7}{12}\cdot\frac{1}{0{,}255} = 2{,}84$$

besitzt, so ergibt sich die gesamte „Formdifferenz" an dieser Stelle:

$$\tau r ds\cdot dn = 164\cdot 0{,}255\cdot 0{,}0087\cdot 0{,}012\cdot 25 = 0{,}109,$$

also nicht ganz 4% von ϑ. Dies Ergebnis zeigt, was zu erwarten war, daß eine merkliche Änderung des Strombildes an dieser Stelle, wo f nur *langsam* wächst, nicht eintritt. Ganz anders verhält es sich in dem Gebiet zwischen der Stromlinie VI und dem äußeren Radkranz, wo sich die drei n-Linien a, b, c dicht aneinander drängen. Hier ergibt die Nachrechnung eine Zunahme von ϑ nach innen hin um fast 100%. Wir haben in die Figur die letzten Stromlinien bereits in *korrigierter* Lage eingezeichnet, wie sie jetzt ungefähr der Gl. (a) entsprechen; da es sich hier um Stromfäden von verhältnismäßig geringer Breite handelt, war es tatsächlich möglich, ohne eine Änderung der übrigen Stromlinien auszukommen. Eine Neubestimmung der n-Linien auf Grund der geänderten Verhältnisse, also eine weitere Verfeinerung

des Resultates, erschien nicht mehr erforderlich. Ja es zeigt sich sogar — was für die praktische Anwendung in allen dem vorliegenden ähnlichen Fällen wichtig ist —, daß man kaum einen merklichen Fehler begeht, wenn man schon das in Abs. 3 entwickelte meridionale Strombild als das endgültige ansieht.

6. Um die *praktischen Folgerungen* kurz anzudeuten, die aus den vorstehenden Erörterungen zu ziehen sind, bemerken wir Folgendes. Als *Austrittskante* aus dem Laufrad läßt sich die Linie c verwenden, da hier n verschwindet, oder man fügt, was besser ist, unterhalb c noch ein Schaufelstück an, auf dem n sich nicht mehr ändert, und das darnach leicht zu konstruieren ist: es wird im Hauptteil von den Zylinderflächen, auf denen die Stromlinienenden liegen, in Schraubenlinien geschnitten, und hat etwas geringere Neigung gegen den Parallelkreis als das in der zugrundegelegten Zeichnung vorhandene Ende. Charakteristisch bleibt das starke Hinaufziehen der Austrittslinie in der Nähe des äußeren Kranzes, das natürlich nicht allgemein, sondern nur für die dem vorliegenden ähnlichen Rädertypen gilt. Der häufig ausgesprochenen Forderung, man müsse die Autrittskante so legen, daß die mittlere Geschwindigkeit längs derselben der „Anfangsgeschwindigkeit" im Saugrohr gleich wird, damit kein „Übergangsstoß" erfolge, können wir keine Bedeutung beimessen. Die Geschwindigkeit ändert sich *stetig*, sobald die äußeren Profilbegrenzungen keine scharfen Sprünge zeigen.

Die bedeutende Veränderlichkeit der radialen Geschwindigkeitskomponente längs der *Eintrittslinie* führt, wie schon oben erwähnt, dazu, auch die Endwinkel in der Leitrad- oder in der Laufradschaufel variabel zu machen. Auf diesen Umstand hat im Prinzip schon Thomann[1]) hingewiesen, und wir sind jetzt in der Lage, die Forderung stetigen Eintrittes auf der ganzen Eintrittsbreite strenge zu erfüllen.

Auf Räder, deren Schaufelstärke nicht gering gegenüber der Kanalweite ist, wie dies bei *Grenzrädern* vorkommt, kann man die hier gebotene Untersuchung nicht ohne weiteres übertragen. Doch bieten die allgemeinen Erörterungen in § 4, 3 die notwendigen Hilfsmittel, um auch diesen Fall zu erledigen. Auch der Strömungsverlauf längs der Schaufeln von *Freistrahlrädern*, auf den hier nicht weiter eingegangen werden soll, wird sich in ähnlicher Weise behandeln lassen, wenn man bedenkt, daß statt der Dicke der Flüssigkeitsschichte hier von vornherein die Größe des Druckes in allen Punkten annähernd gegeben ist.

1) A. a. O. S. 124.

Schließlich muß darauf hingewiesen werden, daß das hier entwickelte Verfahren zur graphischen Ermittlung der Stromlinien, namentlich wenn einmal eine gewisse *zeichnerische Erfahrung* erworben ist, kaum größere Mühe verursachen wird, als eine der heute am Konstruktionstische eingebürgerten Methoden. Es erhebt nur Anspruch darauf, daß seinen Ergebnissen ein *höherer Wahrscheinlichkeitswert* zukommt, als denen irgend einer auf *rein geometrischen* Überlegungen beruhenden Konstruktionsvorschrift.

§ 15. Die Wahl der Schaufelform.

1. Im vorhergehenden Paragraphen ist gezeigt worden, wie man aus den Anschauungen der Stromschichtentheorie heraus sich ein annäherndes Bild der in einem *gegebenen Kreiselrade* vor sich gehenden Strömung verschaffen kann. Es fragt sich nun, ob sich nicht Gesichtspunkte finden lassen, nach denen von vornherein über die *Wahl der einen oder der andern Schaufelform*, die Gestalt der Kranzprofile usf. entschieden werden könnte.

Der nächstliegende Gedanke ist es, die Radteile so zu bestimmen, daß die Strömungswiderstände beim Durchfließen des Schaufelraumes möglichst gering werden — wobei wir Vermeidung der Unstetigkeit am Eintritt, normalen Austritt aus dem Laufrad und die möglichste Verringerung des Austrittverlustes als gegeben voraussetzen dürfen. Allein da man im einzelnen die Abhängigkeit der Widerstände vom Bewegungsverlauf nicht kennt[1]) und überdies kaum annehmen darf, daß die Reibungsverluste durch kleine stetige Abänderung der Führungsteile stark beeinflußt werden, erscheint dieser Gesichtspunkt nicht *ausreichend*. Immerhin ließen sich hier außer den bekannten, in § 13,5 angeführten Bemerkungen allgemeiner Natur noch manche weitere ins Auge fassen, wie etwa die, daß es vorteilhaft ist, die der Verminderung des Austrittsverlustes dienende Querschnittserweiterung möglichst in den *Schaufelraum* und nicht in den Saugrohranfang zu verlegen. Denn da im allgemeinen die u-Komponente der Relativgeschwindigkeit v im Laufrade bis nahe an den Austritt zunimmt, so kann man damit erreichen, daß trotz der Abnahme der Meridiankomponente v' die Resultierende v noch wächst oder wenigstens gleich bleibt; nach den Prandtlschen Beobachtungen ist aber der Widerstand auf Strecken, in denen die mittlere Relativgeschwindigkeit *abnimmt*, bedeutend größer als auf anderen.

1) Die Arbeit von H. Österlin, Untersuchungen über den Energieverlust des Wassers in Turbinenkanälen, Berlin 1903, scheint uns in dieser Richtung keine hinreichend brauchbaren Aufklärungen zu bringen.



Alle in der Literatur bekannt gewordenen „Konstruktionsvorschriften“ für die Schaufeln von Kreiselrädern lassen sich in zwei Gruppen teilen. Die einen tragen wesentlich den Charakter von *Ungleichheitsbedingungen* oder von *negativen* Bestimmungen oder von ähnlichen Einschränkungen, welche die *Stufe* der Mannigfaltigkeit zur Verfügung stehender Formen nicht herabmindern. Hierher gehören außer den eben besprochenen, der Rücksichtnahme auf guten Wirkungsgrad entspringenden Vorschriften noch andere ähnliche, die etwa auf die Art der Herstellung der Schaufeln usw. zurückgehen.

Die zweite Gruppe umfaßt Vorschläge, die von vornherein überhaupt nicht sachlich begründet werden, sondern gewisse Formen auszeichnen, die sich in irgend einer Weise *bequem berechnen* lassen. Für eine derartige Bestimmung unbekannter, teilweise willkürlicher Elemente gibt es auf allen Gebieten der Technik zahlreiche Beispiele. Sie ist naturgemäß nur dort anzuwenden, wo genügend starke und ausreichende sachliche Gesichtspunkte nicht hervortreten und wo ihre Ergebnisse mit keiner sachlich berechtigten Forderung, wie sie etwa einem Vorschlage der ersten Gruppe zugrunde liegt, in Widerspruch geraten. In unserem Falle kann es sich dabei, wenn wir von der unhaltbaren in § 13, 6 skizzierten Auffassung (willkürliche Konstruktion von Teilturbinenprofilen) absehen, nur um die *Verwendung solcher partikulären Integrale der maßgebenden Differentialgleichungen handeln, die sich gerade in einfacher analytischer oder zeichnerischer Form darstellen lassen.*

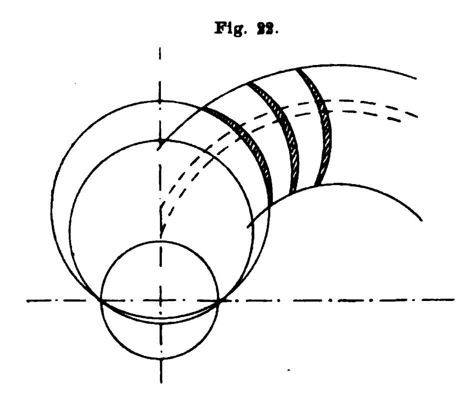
2. Geht man von den Gleichungen der *Strömung in symmetrischen Schichten* aus (§ 4, 4) aus, so erkennt man zunächst, daß bei *rein radialen* Rädern $\psi_r = 0$, jede beliebige ebene Kurve als Leitlinie einer zylindrischen Führungsfläche dienen kann und daß dabei die f-Linien und n-Linien Parallele zur z-Achse werden. Für die *rein axiale* Strömung mit der Stromfunktion $\psi = kr^2$ sind in § 4, 5 die Formeln zur Bestimmung der Schaufelfläche angegeben worden.

Als einfachste Lösung für den Fall einer allgemeinen, d. h. weder in den zur Achse senkrechten Ebenen noch auf den koaxialen Zylindern verlaufenden Strömung ergibt sich die Stromfunktion $\psi = r^2 z$ mit beliebigen Zylinderflächen als Führung: dies ist das von H. Lorenz in den Mittelpunkt der Turbinentheorie gestellte Beispiel einer *möglichen* Schichtenbewegung. Da jede n-Linie somit auch die richtige Austrittskante, hier wieder eine zur Achse parallele Gerade ist, kann die in Rede stehende Lösung im Falle *erweiterter* Laufräder (wie es unser Beispiel, Fig. 18 darstellt) keine Verwendung finden. Die durch sie dargestellte Strömung schließt sich an die teilweise noch verfügbaren Randbedingungen im Saugrohre recht gut, hingegen an die im Leit-

kanal nur schlecht an. Unter den zahlreichen Lösungen, zu denen die Formeln des § 4, 5 die Grundlage bieten, wird man je nach den besonderen Verhältnissen im Einzelfall passende auswählen können. Für erweiterte Räder kommen Stromfunktionen, die in z nicht linear sind, in Frage; den zugehörigen Verlauf der f-Linien, bzw. n-Linien wird man am besten graphisch unter Verwendung geeigneter Annahmen über die Beziehung zwischen f und n, wie es in § 14, 4 gezeigt wurde, bestimmen.

Prášil hat in seiner neueren Arbeit auch Lösungen der Eulerschen Gleichungen gebracht, die weder einer freien symmetrischen Strömung, noch der Bewegung in symmetrischen Schichten entsprechen, aber die Eigenschaft haben, daß die Verhältnisse längs eines Parallelkreises, zumindest auf einem kleinen Teil desselben, *wenig variieren*. Stellt man dann die Schaufelflächen derart her, daß die beiden, jetzt nicht mehr kongruenten Begrenzungen eines Kanales Stromflächen der Lösung sind, so wird die zwischen diesen Flächen tatsächlich eintretende Strömung *angenähert* durch das Integral dargestellt — unter Maßgabe derselben Gründe, die uns oben dazu geführt haben, die Theorie der Stromschichte auf unser Problem anzuwenden. Als hierher gehöriges Beispiel mag die bekannte ebene Potentialströmung dienen, mit

Fig. 22.



$$\psi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$

bei der die Stromlinien die Kreise des Büschels $y = 0$, $x = \pm a$ sind. Die Figur 22, die der Abhandlung von Prásil entlehnt ist, zeigt, in welcher Weise die Anwendung zu geschehen hat.

Daß die ausübende Praxis sich zur Verwendung bestimmter Schaufelformen lediglich deshalb entschließen werde, weil sich für die dann eintretende Strömung leichter eine angenäherte analytische Darstellung finden läßt, als für eine andere, muß bei dem heutigen Stande des Turbinenbaues bezweifelt werden. Die große Fülle nützlicher Einzelerfahrungen, die dem Konstrukteur zur Seite steht, wird ihn wohl in den meisten Fällen auf den Weg lenken, auf dem nach erfolgter freier Wahl der Konstruktionsformen die graphische Stromlinienermittlung, die wir im vorigen Paragraphen eingeführt haben, zur Verwendung gelangen muß.

3. Man verdankt Grashof die erste Andeutung eines vielleicht wert-

vollen Gesichtspunktes für die rationelle Bestimmung der Schaufelformen von Kreiselrädern, den wir noch zum Schlusse erörtern wollen. In einem Preisausschreiben, die Bearbeitung der Freistrahlturbine betreffend, hat Grashof die Forderung ausgesprochen[1]), das Wasser sollte zweckmäßigerweise an jeder Stelle der Schaufel gleiche Wirkung äußern, d. h. *überall einen Schaufeldruck von gleich großem axialen Moment hervorrufen.* Maßgebend hierfür war wohl die Erwägung, daß die Reibung, die von den Druckverhältnissen ziemlich unabhängig ist, an Stellen geringerer Wirksamkeit des Wassers einen verhältnismäßig größeren Verlust bedeutet.[2])

Greift man ein Wasserteilchen heraus, das die Gestalt eines Ringsegmentes vom Querschnitt df und von der Länge $r d\varphi$ besitzt, so beträgt — bei vertikaler Radachse — das Moment der Druckdifferenz in den beiden Axialschnitten:

$$- r\,df\,dp = \mu\,dV \frac{d(c_u r)}{dt},$$

und für die Volumeneinheit:

$$- \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mu \frac{d(c_u r)}{dt}.$$

Ist die Radachse gegen die Vertikale geneigt, so müßte in dieser Gleichung an Stelle von p der um das Potential der Schwere vermehrte Betrag P eintreten; da jedoch das Rad im Betriebe *rotiert*, also periodisch seine Stellung zur Schwererichtung ändert, ist es nicht möglich, bei der jetzt ins Auge gefaßten Bestimmung der Schaufelformen den Einfluß der Schwere zu berücksichtigen.

Gehen wir wieder von der Anschauung aus, daß das Durchschnittsbild der Strömung im Kreiselrade durch das Bild einer stationären Schichtenbewegung angenähert dargestellt wird, so läßt sich für die rechte Seite des obigen Ausdruckes auch schreiben:

$$\mu v \frac{\partial (c_u r)}{\partial s},$$

d. i. bis auf den Faktor μ, in unserer früheren Bezeichnung

$$\frac{1}{r}(\psi_r n_z - \psi_z n_r),$$

und man erkennt, daß die von Grashof ausgesprochene Forderung mit dem Inhalte unserer Gleichung (36) übereinstimmt:

$$\psi_r n_z - \psi_z n_r = Kr.$$

1) Civilingenieur, Bd. 31, Heft 6.

2) Vgl. auch Prášil, Einleitung der zweiten in § 4 zitierten Arbeit.

Die Grashofsche Forderung gleichmäßiger Wirkung des Wassers an allen Stellen der Schaufel ist identisch mit der Bedingung, daß das Durchschnittsbild der Strömung zwischen zwei Schaufeln die Gleichungen der freien symmetrischen Strömung erfülle. Läßt man die Reibung an den Kranzprofilen außer acht, so wird man, wie wir es auch früher getan haben, im Sinne unserer Näherungstheorie die Schichtenbewegung, die das Durchschnittsbild liefern soll, als wirbelfrei ansehen. Daraus folgt: *Die Grashofschen Schaufeln sind die H'-Flächen einer freien symmetrischen Strömung und werden durch Integration des simultanen Gleichungssystems* (28), (36), (37) *mit den abhängigen Variablen f, n, ψ erhalten.*

Wir können der Konstanten K der symmetrischen Bewegung eine zweckmäßige Deutung geben, wenn wir Gl. (71) in § 10, 5 beachten, welche die Änderung der Strömungsenergie eines Wasserteilchens darstellt. In unserem Fall gilt bei Vernachlässigung der Schwerkraft und der Reibung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma}\omega\frac{dp}{d\varphi} = K\frac{\omega}{\gamma},$$

es folgt also: die symmetrische relativ-stationäre Strömung ist auch dadurch gekennzeichnet, *daß die sekundliche Änderung der Strömungsenergie für alle Teilchen und zu jeder Zeit dieselbe bleibt.* Im Laufrade einer derartigen Turbine oder Pumpe ist der Energieaustausch zwischen Rad und Wasser dem Werte von K und dem von ω proportional.[1])

Wird ein Kreiselrad mit Grashofschen Schaufeln ausgestattet, so daß das Durchschnittsbild der Strömung zwischen zwei Schaufeln das Bild einer freien symmetrischen Bewegung wird, so folgt daraus natürlich nicht, daß die Geschwindigkeitsverteilung, die man bei Mittelwertbildung über die Turbulenzschwankungen erhält, an jeder Stelle einer relativ-stationären und symmetrischen Bewegung entspricht. Insbesondere sind diese Geschwindigkeiten nach unserer Bemerkung in § 8, 5 annähernd *wirbelfrei* verteilt, während für jedes von null verschiedene K die symmetrische Strömung Wirbel besitzt. Es werden durch die neue Durchschnittsbildung *scheinbare* Wirbel eingeführt; nur die zur Führungsfläche *senkrechte* Komponente (die wir eben zu null gemacht haben, indem wir die H'-Flächen als Schaufeln wählten) ist eine Wirbelkomponente der wirklichen Verteilung. Im allgemeinen

1) Von der Grashofschen verschieden ist die von H. Lorenz a. a. O. S. 36 aufgestellte Forderung gleichmäßigen Energieaustausches, die besagt, daß für jeden Stromfaden mit der sekundlich durchströmenden Wassermenge dQ die Arbeitsabgabe in der Zeiteinheit gleich, daß also auf der Aus- und Eintrittsfläche des Laufrades je der Wert von n ein konstanter sein soll.

wird K im Laufrad einer Turbine oder Pumpe einen negativen bezw. positiven Wert, im Leitrade den Wert null erhalten. Den gewöhnlichen Voraussetzungen zufolge, ist dann n im Leitrade überhaupt konstant.

Die hier in Rede stehende Gestaltung der Schaufeln von Kreiselrädern wird vielleicht auch die Wirkung haben, daß die unvermeidlichen Schwankungen der Bewegung in den aufeinander folgenden Axialschnitten geringer werden als es sonst der Fall ist. Ist diese Vermutung richtig, so würde sich die Verwendung der Grashofschen Schaufeln von dieser Seite her als *die Reibungsverluste vermindernd* rechtfertigen.

4. Wir werfen zunächst einen Blick auf die einfachsten *Partikularlösungen des Symmetrieproblems*, die im wesentlichen schon in den Arbeiten von Prášil gegeben wurden.

a) Für die ebene, senkrecht zur Achse verlaufende Strömung ist die allgemeinste Gleichung der Führungslinie in § 4, 7 bestimmt worden zu

$$f = \frac{k}{a}\ln r + \frac{r^2}{2a}\left(\frac{K}{2a} - \omega\right) - \varphi .$$

Die Leitradschaufel ($K = 0$, $\omega = 0$) ist eine logarithmische Spirale, während die des Laufrades im allgemeinen davon abweichend auszubilden ist. Setzt man $n = 0$ für $r = r_1$ (Eintrittsradius einer innen beaufschlagten Kreiselpumpe), so wird (§ 4,7)

$$2ak = -r_1^2,$$

und mit $n = n_2$ für $r = r_2$ (Austrittsradius), zufolge Gl. (80b) (§ 12,1)

$$\frac{gH}{\eta} = -\omega n_2 = -\omega\frac{K}{2a}(r_2^2 - r_1^2),$$

wobei $-H$ die Förderhöhe, η den Wirkungsgrad bedeutet; schließlich beträgt die Wassermenge Q_1, bezogen auf eine Radhöhe von der Längeneinheit

$$Q_1 = 2r\pi c_r = 2a\pi ,$$

so daß sich die drei Konstanten ergeben zu

$$a = \frac{Q_1}{2\pi}, \quad k = -\frac{r_1^2\pi}{Q_1}, \quad K = -\frac{gQ_1H}{\eta(r_2^2 - r_1^2)\omega\pi}.$$

Die Laufradschaufel wird also eine logarithmische Spirale, wenn die Beziehung besteht:

$$\frac{gH}{\eta} = \omega^2(r_2^2 - r_1^2).$$

b) Zu der wiederholt genannten Stromfunktion

$$\psi = Ar^2z$$

gehören jetzt als allgemeinste Führungsflächen die durch

$$f = -\frac{K}{2A^2r^2}\ln r - \frac{1}{2Ar^2}\left(\frac{K}{2A} + k\right) - \frac{\omega}{A}\ln r + \varphi$$

dargestellten Zylinder. Auf eine außen beaufschlagte Turbine mit r_1, r_2 als Ein- und Austrittsradien angewendet, gibt dies mit Rücksicht auf § 12,1

$$n_2 = 0, \quad g\eta H = \omega n_1, \quad Q = -2r\pi\int\frac{\psi_z}{r}dz;$$

somit:

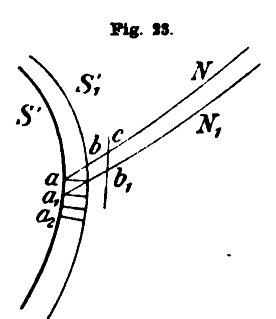
$$A = -\frac{Q}{2r_1^2\pi b}, \quad K = -\frac{g\eta HQ}{2r_1^2\pi b\omega\ln\frac{r_1}{r_2}}, \quad k = -\frac{g\eta H}{\omega\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln r_2,$$

wenn wieder η den Wirkungsgrad (§ 10,1), H das Gefälle, Q die Wassermenge und b die Einlaufbreite am äußeren Umfang bezeichnet. Durch die Verfügung über die Konstanten A, K, k sind die Kranzprofile selbst noch nicht vollständig bestimmt, da man die Lage der r-Achse noch frei hat.

Wichtiger als die Erörterung derartiger partikulärer Integrale, denen immer nur eine sehr beschränkte Verwendbarkeit zukommen dürfte, erscheint eine Untersuchung des allgemeinen *Randwertproblems der symmetrischen Strömung.*

5. Es seien (Fig. 23) die Meridianprojektionen S' und S_1' zweier benachbarter Stromlinien und der zugehörige Wert von $\Delta\psi$ gegeben.

Fig. 23.



Von irgend einem Punkte a auf S' ausgehend bestimmen wir die Punktfolge a, a_1, a_2 .... auf S' derart, daß die Flächeninhalte σ'' der entstehenden kleinen Vierecke der Gleichung (47) genügen

$$r\sigma'' = \frac{\Delta n \Delta\psi}{K} = \text{konst.}$$

Durch a und a_1 denken wir uns zwei mit ihren Funktionswerten n und $n + \Delta n$ gegebene n-Linien N und N_1 gezogen, so daß damit auch der Wert von K als bekannt erscheint. Auf N läßt sich jetzt der Punkt c der Stromlinie S_2' finden, wenn man darauf achtet, daß das aus bc und bb_1 gebildete Parallelogramm wieder die Gleichung (47) befriedigen muß. Zieht man durch c die Parallele zur Tangente an S_1' in b, so ist damit für den Punkt a die „Formdifferenz“ τ gegeben; aus Gleichung (48) berechnet man dann, da n, n_z bekannt sind, den Wert, den τ im Nachbarpunkte a_1 besitzt. In wiederholt erläuterter Weise bestimmt sich durch den neuen Wert von τ ein zweiter Punkt c

